УДК 519.681.2, 519.681.3

Семантика систем переходов структур событий с отменяемыми событиями при сохранении причинно-следственной зависимости

Грибовская Н.С. (Институт систем информатики СО РАН)

Вирбицкайте И.Б. (Институт систем информатики СО РАН)

Реверсивные (обратимые) вычисления — это новая парадигма, которая расширяет традиционную организацию вычислений возможностью их выполнения в обратном направлении. Структуры событий, являющиеся одной из центральных моделей параллельных недетерминированных процессов, широко используются для установления взаимосвязей между различными моделями параллелизма. В литературе выделяются два метода разработки семантики систем переходов для моделей структур событий. В первом методе состояния рассматриваются как конфигурации (наборы событий, которые уже произошли в структуре), а переходы между состояниями строятся, начиная с начальной конфигурации и расширяя конфигурации за счёт произошедших событий. Во втором методе состояния понимаются как остаточные структуры (фрагменты модели, которые остались после удаления из неё уже произошедших и конфликтующих событий), а переходы создаются по мере построения остаточных структур.

Данная статья посвящена построению и исследованию взаимосвязей двух типов систем переходов, построенных из реверсивных первичных структур событий с отменяемыми событиями и с сохранением причинно-следственной зависимости между событиями. Устанавливается факт существования бисимуляционной эквивалентности между такими системами переходов в контексте истинно-параллельной (шаговой) семантики рассматриваемой модели структур событий.

Ключевые слова: структуры событий, отменяемые события, системы переходов, частичный порядок, истинный параллелизм, бисимуляция

1. Введение

Реверсивные (обратимые) вычисления, широко изучаемые в последние годы, представляют собой нетрадиционную форму вычислений, которые могут быть выполнены как в прямом, так и в обратном направлении. Любая последовательность действий, выполняемых системой, впоследствии может быть отменена по какой-либо причине (например, в случае ошибки), что позволяет восстановить предыдущие состояния системы, как если бы отмененные действия вообще не выполнялись. Обратимые вычисления привлекают интерес благодаря своим применениям во многих областях, включая: анализ программ и отладку [25], абстракции программирования для надежных систем [12, 27], моделирование биохимических процессов [22], проектирование аппаратуры и квантовые вычисления [13] и т.д.

Несмотря на то, что реверсивные вычисления в параллельных/распределенных системах имеют много перспективных применений, такие вычисления сопряжены со многими концептуальными и техническими трудностями. Одна из наиболее существенных проблем касается методов, которые следует использовать для обеспечения корректных вычислений в обратном направлении. Недавно было выявлено несколько различных способов отмены вычислений. Наиболее заметными из них являются обратное отслеживание, обратимость с учетом причинно-следственной зависимости (ПСЗ) между действиями системы, а также обратимость без учёта такой зависимости. Эти способы отличаются порядком выполнения действий в обратном направлении. Под обратным отслеживанием обычно понимается способность отменять действия, строго соблюдая порядок, в котором они были выполнены. Обратимость с учетом ПСЗ в параллельных системах означает, что действия, которые являются причиной для других действий, могут быть отменены только после того, как эти другие действия будут отменены прежде, и что независимые друг от друга (параллельные) действия могут быть отменены в произвольном порядке. Обратимость без учета ПСЗ, наиболее характерная для биохимических систем, не сохраняет ПСЗ. Взаимодействие между обратимостью и параллелизмом широко изучалось в различных моделях: системах параллельной перезаписи [1], клеточных автоматах [20], алгебраических исчислениях параллельных процессов [12, 24], сетях Петри [6, 14, 29], структурах событий [28, 32, 34], мембранных системах [33] и т.д.

Структуры событий — одна из центральных моделей в теории параллелизма. Первоначально структуры событий были предложены Винскелем в его диссертации [35] и рассматривались как промежуточная абстракция между доменами Скотта (т.е. денотационной моделью) и сетями Петри (т.е. операционной моделью). По сути, структуры событий представляют собой наборы событий моделируемой системы, некоторые из которых конфликтуют друг с другом (т.е. выполнение одного события запрещает выполнение других событий), в то время как другие события находятся в отношении ПСЗ (т.е. событие не может быть выполнено, если ему не предшествовали другие события), и события, которые не связаны ни отношением ПСЗ, ни отношением конфликта, рассматриваются как независимые (параллельные). Первичные структуры событий — это модель параллельных недетерминированных процессов, в которой отношение ПСЗ представляется частичным порядком, а конфликт между событиями наследуется по ПСЗ.

Известно, что установление взаимосвязей между моделями систем переходов и структур событий способствует изучению и решению различных задач анализа и верификации поведения параллельных систем. Различают два метода обеспечения семантики систем переходов для структур событий. В первом методе (см. [2, 3, 15, 19, 21, 35, 36] среди прочего) состояния рассматриваются как наборы уже произошедших событий, называемые конфигурациями, а переходы между состояниями строятся, начиная с начальной конфигурации и расширяя конфигурации за счет произошедших событий. Во втором, более 'структурно-композиционном' методе (см., в частности, [5, 9, 11, 21, 23]), состояния понимаются как остаточные части структуры, получаемые посредством удаления уже произошедших и конфликтующих событий, при этом начальное состояние — это исходная структура события, переходы создаются по мере построения остаточных структур. В литературе системы переходов, основанные на конфигурациях, активно применяются для определения семантики и эквивалентностей параллельных моделей, а системы перехода, основанные на остаточных структурах, преимущественно используются для обеспечения операционной семантики алгебраических исчислений параллельных процессов и демонстрации согласованности операционной и денотационной семантик. Взаимосвязи между этими двумя типами систем переходов впервые изучались в статье [26] для наиболее простой модели — первичных структур событий, а затем в статьях [7] и [8] — для широкого спектра моделей структур событий с асимметричным и симметричным конфликтом соответственно.

Реверсивные структуры событий расширяют модели структур событий, чтобы представлять обратимые параллельные процессы, способные отменять выполненные действия, позволяя конфигурациям изменяться путем не только добавления произошедших событий, но их удаления. В работах [32, 34] Филлипс и др. определили учитывающие и неучитывающие ПСЗ модели первичных [32], асимметричных [32, 34] и обобщенных [34] структур событий и показали соответствие между их конфигурациями и конфигурациями традиционных (без отменяемых событий) моделей. В статье [17] Граверсен и др. представили категории различных классов реверсивных структур событий, включая упомянутые выше, и построили функторы между этими категориями. В работе [4] Обер и Кристеску разработали в терминах структур конфигураций ‘истинно’ параллельную семантику реверсивного расширения CCS, RCCS (без автопараллелизма, автоконфликта и рекурсии). В статье [18] Граверсен и др. построили категорию реверсивных структур событий с расслоением и симметричным конфликтом и использовали подкатегорию, учитывающую отношение ПСЗ между событиями, для моделирования семантики другого реверсивного расширения CCS, CCSK. В работе [31] логика идентификатора событий (EIL) была введена для расширения логики Хеннесси-Милнера с помощью обратных модальностей. Оказалось, что в контексте стабильных структур конфигураций EIL-эквивалентность соответствует эквивалентности наследуемой бисимуляции с сохранением истории (hereditary history-preserving bisimulation). В статье [30] впервые были изучены взаимосвязи различных поведенческих эквивалентностей в реверсивных моделях.

Цель данной статьи — построение и исследование взаимосвязей двух типов систем переходов, основанных на конфигурациях и на остаточных структурах, для первичных структур событий, обогащенных отменяемыми событиями с сохранением отношения ПСЗ между событиями при выполнении модели в обратном направлении, что может помочь в разработке и сравнении операционной и денатоционной семантик алгебраических исчислений реверсивных параллельных процессов.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 рассматриваются синтаксис реверсивных первичных структур событий и их истинно-параллельная (шаговая) семантика в терминах конфигураций. В разделе 3 определяется оператор удаления событий, который используется для построения остаточных структур, и демонстрируются его корректность и композиционный свойства. В разделе 4 разрабатываются два типа семантик систем переходов для реверсивных первичных структур событий с сохранением ПСЗ и устанавливаются взаимосвязи между этими семантиками. В разделе 5 приводятся заключительные замечания. В приложении представлены доказательства лемм и утверждений.

2. Реверсивные первичные структуры событий

В этом разделе сначала определяется модель первичных структур событий (ПСС) [35], а затем формулируется понятие реверсивных первичных структур событий (РПСС) [32], а также рассматриваются их шаговая, основанная на множестве параллельно происходящих событий, семантика и их свойства.

Для формального описания поведения параллельных/распределенных систем используются модели структур событий, в которых элементы поведения представлены событиями. Существуют различные способы определения отношений между событиями. В ПСС причинно-следственная зависимость между событиями задается частичным порядком, а несовместимость событий определяется отношением конфликта. Два события, которые не находятся ни в причинно-следственной зависимости, ни в конфликте, считаются независимыми (параллельными).

Определение 1. Первичная структура событий (ПСС) *— это кортеж* $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, C_0)$*, где*

- E *— счетное множество* событий*;*
- $< \subseteq E \times E$ *— иррефлексивный частичный порядок (*причинно-следственная зависимость *(ПСЗ)), удовлетворяющий* принципу конечности причин*: для каждого* $e \in E$ *верно, что* $\lfloor e \rfloor_< = \{e' \in E \mid e' < e\}$ *— конечное множество. Пусть* $\leq = < \cup \{(e, e) \mid e \in E\}$*.*
- $\sharp \subseteq E \times E$ *— иррефлексивное симметричное отношение* конфликта*, удовлетворяющее* принципу наследования конфликта*: для всех* $e, e', e'' \in E$ *верно, что если* $e < e'$ *и* $e \sharp e''$*, то* $e' \sharp e''$*;*
- $C_0 = \emptyset$ — начальная конфигурация.

Итак, ПСС — это модель, основанная на событиях параллельных и недетерминированных процессов, в которой события рассматриваются как атомарные, неделимые и мгновенные действия, некоторые из которых могут происходить только после других (т.е. существует ПСЗ, представленная иррефлексивным частичным порядком $<$ между событиями) и некоторые из которых не могут происходить вместе (т.е. между событиями существует конфликт $\sharp$). Кроме того, необходимы принцип конечности причин и принцип наследования конфликта.

ПСС выполняется по мере того, как происходят события, начиная с начального состояния и переходя из одного состояния в другое. Состояние в ПСС называется конфигурацией и представляет собой множество уже произошедших событий. Подмножество $X \subseteq E$ событий является *лево-замкнутым относительно* $<$, если для всех $e \in X$ считается, что $\lfloor e \rfloor_< \subseteq X$; является *бесконфликтным*, если для всех $e, e' \in X$ верно, что $\neg(e \sharp e')$. Подмножество $C \subseteq E$ является *конфигурацией* в ПСС $\mathcal{E}$, если C конечно, лево-замкнуто относительно $<$ и бесконфликтно.

Реверсивные первичные структуры событий (РПСС) [32, 34] основаны на более слабой форме ПСС, поскольку принцип наследования конфликта может не сохраняться при добавлении обратимости. Кроме того, в РПСС некоторые события рассматриваются как отменяемые, а также добавляются два отношения между событиями: обратная ПСЗ и отношение предотвращения отмены. Первое отношение — это ПСЗ в обратном направлении, т.е. чтобы отменить событие в текущей конфигурации, в ней должны присутствовать события, от которых это событие обратимо зависит. Второе отношение, напротив, идентифицирует те события, присутствие которых в текущей конфигурации предотвращает отмену события.

Определение 2. Реверсивная первичная структура событий (РПСС) *— это кортеж* $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, F, \prec, \rhd, C_0)$, *где*

- E *— счетное множество* событий*;*
- $\sharp \subseteq E \times E$ *— иррефлексивное и симметричное отношение* конфликта*;*
- $< \subseteq E \times E$ *— иррефлексивный частичный порядок (*причинно-следственная зависимость*), удовлетворяющая условию: для каждого* $e \in E$ *верно, что* $\lfloor e \rfloor_<$ *— конечное и бесконфликтное множество, а также для каждых* $e, e' \in E$ *верно, что если* $e < e'$*, то* $\neg(e \sharp e')$*;*
- $F \subseteq E$ *— множество* отменяемых событий*, обозначаемое как* $\underline{F} = \{\underline{u} \mid u \in F\}$*;*
- $\prec \subseteq E \times \underline{F}$ — обратная причинно-следственная зависимость *такая, что для каждого* $u \in F$ *верно, что* $u \prec \underline{u}$ *и* $\llcorner u \lrcorner_\prec = \{e \mid e \prec \underline{u}\}$ *— конечное и бесконфликтное множество;*
- $\rhd \subseteq E \times \underline{F}$ — отношение предотвращения отмены *такое, что для каждого* $u \in F$ *верно: если* $e \prec \underline{u}$*, то* $\neg(e \rhd \underline{u})$*;*
- $\ll$ *— транзитивная* устойчивая причинно-следственная зависимость *такая, что* $e \ll e'$*, если и только если* $e < e'$ *и* $e \in F \Rightarrow e' \rhd \underline{e}$*. Отношение конфликта* $\sharp$ наследуется по устойчивой ПСЗ $\ll$*: если* $e \sharp e' \ll e''$*, то* $e \sharp e''$*;*
- $C_0 \subseteq E$ — начальная конфигурация.

Заметим, что в РПСС начальная конфигурация необязательно должна быть пустым множеством, она может содержать события, некоторые из которых впоследствии могут быть отменены. Несложно проверить, что любая ПСС также является РПСС, имеющая $F = \emptyset$ и $C_0 = \emptyset$. Тогда любое понятие, определенное для РПСС, применимо и к ПСС.

При графическом представлении РПСС используются следующие обозначения. Неотменяемые события рисуются квадратиками, а отменяемые — кружочками. Отношение

ПСЗ изображается сплошными стрелками (за исключением тех, которые выводятся по транзитивности), отношение обратной ПСЗ — пунктирными стрелками, а также явно показываются отношения конфликта и предотвращения отмены. События, относящиеся к начальной конфигурации, окрашены в темно-серый цвет. Очевидно, что если начальная конфигурация представляет собой пустое множество, то никакие события не окрашены в темно-серый цвет.

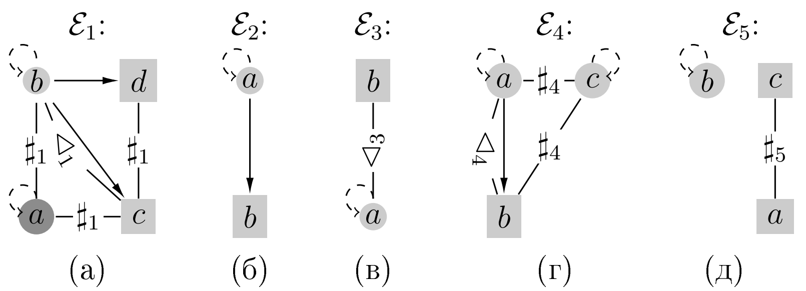

Рисунок 1: Примеры РПСС

Пример 1. *Рассмотрим показанную на рис. 1(а) структуру $\mathcal{E}_1$ с компонентами: $E_1 = \{a, b, c, d\}$; $<_1 = \{(b, c), (b, d)\}$; $\sharp_1 = \{(a, b),\ (b, a),\ (a, c),\ (c, a),\ (c, d),\ (d, c)\}$; $F_1 = \{a, b\}$; $\prec_1 = \{(a, \underline{a}), (b, \underline{b})\}$; $\rhd_1 = \{(c, \underline{b})\}$; $C_0^1 = \{a\}$. Легко убедиться в том, что компоненты структуры $\mathcal{E}_1$ удовлетворяют соответствующим пунктам определения 2. В частности, видим, что для каждого события $e \in E_1$ (для каждого события $u \in F_1$) множество $\lfloor e \rfloor_{<_1}$ ($\llcorner u \lrcorner_{\prec_1}$) конечно и бесконфликтно; $<_1 = \{(b, c), (b, d)\}$ и $(b, c), (b, d) \notin \sharp_1$, а также $\prec_1 = \{(a, \underline{a}), (b, \underline{b})\}$ и $(a, \underline{a}), (b, \underline{b}) \notin \rhd_1$. Заметим, что начальная конфигурация $C_0^1 = \{a\}$ не является пустым множеством. Также, пары (b, c) и (b, d) принадлежат отношению $<_1$, тогда как отношение $\rhd_1$ содержит только пару $(c, \underline{b})$. Значит, только пара (b, c) находится в отношении $\ll_1$ устойчивой ПСЗ. Легко видеть, что конфликт $\sharp_1$ наследуется по $\ll_1$. Таким образом, структура $\mathcal{E}_1$ является РПСС.* $\diamond$

РПСС выполняется по мере того, как происходят и/или отменяются события, начиная с начальной конфигурации и переходя от одной конфигурации к другой. Множества событий, которые происходят/отменяются при таком переходе, называются шагами в РПСС. Достижимые конфигурации — это подмножества событий, которые могут быть получены из начальной конфигурации путем выполнения шагов.

Определение 3. *Пусть $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, F, \prec, \rhd, C_0)$ — РПСС и $C \subseteq E$ — конечное и бесконфликтное множество. Тогда*

- *для множеств* $A \subseteq E$ *и* $B \subseteq F$ *будем говорить, что шаг* $A \cup \underline{B}$ возможен из C, *если выполнены следующие условия:*

  а) $A \cap C = \emptyset$, $B \subseteq C$, $(C \cup A)$ *— конечное и бесконфликтное множество;*

  б) $\forall e \in A, \forall e' \in E \ : \ e' < e \Rightarrow e' \in (C \setminus B)$;

  в) $\forall e \in B, \forall e' \in E \ : \ e' \prec \underline{e} \Rightarrow e' \in (C \setminus (B \setminus \{e\}))$;

  г) $\forall e \in B, \forall e' \in E \ : \ e' \rhd \underline{e} \Rightarrow e' \notin (C \cup A)$.

  Если шаг $A \cup \underline{B}$ *возможен из* C, *то* $C \xrightarrow{A \cup \underline{B}} C' = (C \setminus B) \cup A$.

- C — (достижимая из начальной конфигурации C_0) конфигурация в $\mathcal{E}$, *если для всех* $i = 1, \ldots, n$ $(n \geq 0)$ *существуют множества* $A_i \subseteq E$ *и* $B_i \subseteq F$ *такие, что* $C_{i-1} \xrightarrow{A_i \cup \underline{B}_i} C_i$ *и* $C_n = C$. *Множество конфигураций в* $\mathcal{E}$ *обозначается как* $Conf(\mathcal{E})$.

Пример 2. *Сначала вспомним пример 1, где представлена РПСС* $\mathcal{E}_1$ *с компонентами:* $E_1 = \{a, b, c, d\}$; $<_1 = \{(b, c), (b, d)\}$; $\sharp_1 = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (c, d), (d, c)\}$; $F_1 = \{a, b\}$; $\prec_1 = \{(a, \underline{a}), (b, \underline{b})\}$; $\rhd_1 = \{(c, \underline{b})\}$; $C_0^1 = \{a\}$.

Рассмотрим возможные шаги в РПСС $\mathcal{E}_1$. *Поскольку пара* (a, b) $((a, c))$ *принадлежит отношению* $\sharp_1$, *события* a *и* b *(*a *и* c*) не могут присутствовать вместе в какой-либо конфигурации. Кроме того, так как пары* (b, c) *и* (b, d) *находятся в ПСЗ* $<_1$, *то события* c *и* d *не могут произойти, пока событие* b *не произойдет. Поэтому в начальную конфигурацию* $C_0^1 = \{a\}$ *невозможно добавить какое-либо событие, несмотря на то, что события* a *и* d *независимы (параллельны). При этом, из конфигурации* $\{a\}$ *возможен шаг* $(\emptyset \cup \{\underline{a}\})$, *поскольку* $\prec_1 = \{(a, \underline{a}), (b, \underline{b})\}$, *т.е. единственное событие, необходимое для отмены события* a, *— само это событие, и верно, что* $(\cdot, \underline{a}) \notin \rhd_1$, *где* $\cdot \in \{b, c, d\}$, *т.е. в РПСС* $\mathcal{E}_1$ *нет событий, которые могли бы препятствовать отмене события* a. *Далее из конфигурации* $\emptyset$ *возможен шаг* $(\{a\} \cup \emptyset)$, *вновь получая конфигурацию* $\{a\}$, *так как событие* a *не имеет предшественников по ПСЗ. Кроме того, поскольку событие* b *также не имеет предшественников по ПСЗ и пары* (b, c) *и* (b, d) *принадлежат отношению* $<_1$, *получаем следующие переходы:* $\emptyset \overset{(\{b\} \cup \emptyset)}{\rightarrow} \{b\} \overset{(\{c\} \cup \emptyset)}{\rightarrow} \{b, c\}$ *и* $\emptyset \overset{(\{b\} \cup \emptyset)}{\rightarrow} \{b\} \overset{(\{d\} \cup \emptyset)}{\rightarrow} \{b, d\}$. *Заметим, что конфигурация* $\{b, c\}$ *(*$\{b, d\}$*) не может быть расширена событием* d *(*c*), в силу того, что события* c *и* d *конфликтуют. Благодаря тому, что имеем* $\prec_1 = \{(a, \underline{a}), (b, \underline{b})\}$, *т.е. единственное событие, необходимое для отмены события* b, *— само это событие, и* $\rhd_1 = \{(c, \underline{b})\}$, *т.е. событие* b *может быть отменено, только если событие* c *еще не произошло, следующие переходы возможны:* $\{b\} \overset{(\emptyset \cup \{\underline{b}\})}{\rightarrow} \emptyset$ *и* $\{b, d\} \overset{(\emptyset \cup \{\underline{b}\})}{\rightarrow} \{d\}$. *Так как события* a *и* d *не конфликтуют и событие* a *не имеет предшественников по ПСЗ, можем* *перейти из конфигурации* $\{d\}$ *в конфигурацию* $\{a, d\}$ *посредством шага* $(\{a\} \cup \emptyset)$*. Поскольку единственное событие, необходимое для отмены события* a*, — само это событие и в РПСС* $\mathcal{E}_1$ *нет событий, которые могли бы препятствовать отмене события* a*, то можем отменить* a *в конфигурации* $\{a, d\}$*, получая вновь конфигурацию* $\{d\}$*. Таким образом, конфигурации РПСС* $\mathcal{E}_1$ *— это множества* $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{a, d\}$.

Построим конфигурации в изображенной на рис. 1(б) РПСС $\mathcal{E}_2$ *с компонентами:* $E_2 = \{a, b\}$; $<_2 = \{(a, b)\}$; $\sharp_2 = \emptyset$; $F_2 = \{a\}$; $\prec_2 = \{(a, \underline{a})\}$; $\rhd_2 = \emptyset$; $C_0^2 = \emptyset$*. Поскольку единственная пара* (a, b) *принадлежит ПСЗ* $<_1$*, то событие* a *не имеет предшественников по ПСЗ и является предшественником по ПСЗ для события* b*, т.е. событие* a *может произойти первым и только после этого может произойти событие* b*. Тогда получаем следующее:* $C_0^2 = \emptyset \stackrel{(\{a\} \cup \emptyset)}{\rightarrow} \{a\} \stackrel{(\{b\} \cup \emptyset)}{\rightarrow} \{a, b\}$*. Событие* a *может быть отменено в конфигурациях* $\{a\}$ *и* $\{a, b\}$*, так как имеем* $\prec_2 = \{(a, \underline{a})\}$ *и* $\rhd_2 = \emptyset$*. Следовательно, получаем такие конфигурации в* $\mathcal{E}_2$*:* $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$.

Рассмотрим на рис. 1(в) РПСС $\mathcal{E}_3$ *с компонентами:* $E_3 = \{a, b\}$; $<_3 = \emptyset$; $\sharp_3 = \emptyset$; $F_3 = \{a\}$; $\prec_3 = \{(a, \underline{a})\}$; $\rhd_3 = \{(b, \underline{a})\}$; $C_0^2 = \emptyset$*. Поскольку отношения* $<_3$ *и* $\sharp_3$ *пусты, события* a *и* b *параллельны и поэтому они могут присходить в любом порядке. Тогда получаем следующее:* $\emptyset \stackrel{(\{a\} \cup \emptyset)}{\rightarrow} \{a\} \stackrel{(\{b\} \cup \emptyset)}{\rightarrow} \{a, b\}$ *и* $\emptyset \stackrel{(\{b\} \cup \emptyset)}{\rightarrow} \{b\} \stackrel{(\{a\} \cup \emptyset)}{\rightarrow} \{a, b\}$*. Так как верно, что* $b \rhd_3 \underline{a}$*, событие* b *предотвращает отмену события* a*, т.е.* a *не может быть отменено, если* b *присутствует в конфигурации. Тогда шаг* $(\emptyset \cup \{\underline{a}\})$ *возможен из конфигурации* $\{a\}$*, приводя в конфигурацию* $\emptyset$*, и не возможен из конфигурации* $\{a, b\}$*. Конфигурации в* $\mathcal{E}_3$ *— это множества* $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$.

Проверим, как выполняется показанная на рис. 1(г) РПСС $\mathcal{E}_4$ *с компонентами:* $E_4 = \{a, b, c\}$; $<_4 = \{(a, b)\}$; $\sharp_4 = \{(a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}$; $F_4 = \{a, c\}$; $\prec_4 = \{(a, \underline{a}), (c, \underline{c})\}$; $\rhd_4 = \{(b, \underline{a})\}$; $C_0^4 = \emptyset$*. Так как верно* $<_4 = \{(a, b)\}$*, событие* a *(*c*) не имеет предшественником по ПСЗ, т.е.* a *(*c*) может произойти первым. Также, событие* a *является предшественником по ПСЗ для события* b*, т.е.* b *не может произойти до того, как* a *произойдет. События* a *(*b*) и* c *конфликтуют, т.е. события* a *(*b*) и* c *не могут находится вместе в какой-либо конфигурации. Нетрудно понять, что отношение* $\sharp_4$ *наследуется по отношению* $<_4$*. Единственное событие, необходимое для отмены события* a *(*c*), — само это событие, так как* $\prec_4 = \{(a, \underline{a}), (c, \underline{c})\}$*. Кроме того, если оба события* a *и* b *присутствуют в* *конфигурации, то событие a не может быть отменено, поскольку имеем $b \rhd_4 \underline{a}$. Поэтому конфигурациями в РПСС $\mathcal{E}_4$ являются множества $\emptyset$, $\{a\}$, $\{a,b\}$, $\{c\}$.*

В конце построим конфигурации изображенной на рис. 1(д) РПСС $\mathcal{E}_5$ с компонентами: $E_5 = \{a,b,c\}$; $<_5 = \emptyset$; $\sharp_5 = \{(a,c),(c,a)\}$; $F_5 = \{b\}$; $\prec_5 = \{(b,\underline{b})\}$; $\rhd_5 = \emptyset$; $C_0^4 = \emptyset$. Видим, что a и c конфликтуют, т.е. они не могут вместе присутствовать в какой-либо конфигурации. Поскольку отношение $<_5$ пусто и отношение $\sharp_5$ содержит только пары (a,c) и (c,a), события a и b (b и c) параллельны и поэтому могут происходить в любом порядке. Следовательно, получаем следующее: $\emptyset \stackrel{(\{a\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{a\} \stackrel{(\{b\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{a,b\}$ и $\emptyset \stackrel{(\{b\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{b\} \stackrel{(\{a\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{a,b\}$ ($\emptyset \stackrel{(\{b\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{b\} \stackrel{(\{c\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{b,c\}$ и $\emptyset \stackrel{(\{c\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{c\} \stackrel{(\{b\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{b,c\}$). Единственное событие, необходимое для отмены события b, — само это событие, поскольку $\prec_5 = \{(b,\underline{b})\}$. Так как $\rhd_5 = \emptyset$, событие b может быть отменено в любой конфигурации, где оно присутствует. Конфигурации в $\mathcal{E}_5$ — это множества $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{b,c\}$. $\diamond$

РПСС способны моделировать такую особенность реверсивных вычислений, как согласованность отношения обратимости с отношением ПСЗ: событие может быть отменено при условии, что все его последователи по ПСЗ были отменены. Это понятие реверсивности естественно для надежных параллельных систем, поскольку при возникновении ошибки система пытается корректно вернуться к предыдущему состоянию.

Определение 4. *РПСС $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, F, \prec, \rhd, C_0)$ называется* сохраняющей причинно-следственную зависимость *(со свойством СПСЗ), если для событий $e \in E$ и $u \in F$ верно: (а) $e \prec \underline{u} \;\Leftrightarrow\; e = u$; (б) $e \rhd \underline{u} \;\Leftrightarrow\; u < e$.*

Неформально говоря, в РПСС со свойством СПСЗ отменяемые события могут быть удалены из конфигурации только, если они сами присутствуют в этой конфигурации, а также отменяемые предшественники по ПСЗ могут быть удалены только, если их последователи по ПСЗ не присутствуют в этой конфигурации.

Пример 3. *Вновь рассмотрим пример 2. Легко видеть, что РПСС $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}_3$ не обладают свойством СПСЗ, поскольку их отношения ПСЗ и предотвращения отмены различаются, что противоречит пункту (б) в определении 4, хотя пункт (а) выполнен; тогда как РПСС $\mathcal{E}_4$ и $\mathcal{E}_5$ имеют свойство СПСЗ, так как их отношения ПСЗ, обратной ПСЗ и предотвращения отмены удовлетворяют обоим требованиям определения 4.* $\diamond$

Следующая лемма говорит об особенности конфигураций в РПСС со свойсвом СПСЗ, которые остаются конечными, лево-замкнутыми относительно ПСЗ и бесконфликтными при выполнении РПСС.

Лемма 1. *Пусть* $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, F, \prec, \rhd, C_0)$ *— РПСС со свойством СПСЗ и* $C \in Conf(\mathcal{E})$. *Тогда* C *конечно, лево-замкнуто относительно* $<$ *и бесконфликтно, если* C_0 *конечно, лево-замкнуто относительно* $<$ *и бесконфликтно.*

Доказательство: См. приложение. □

Приведенный ниже пример поясняет приведенную выше лемму.

Пример 4. *Вспомним необладающую свойством СПСЗ РПСС* $\mathcal{E}_1$ ($E_1 = \{a,\ b,\ c,\ d\}$; $<_1 = \{(b,c),(b,d)\}$; $C_0^1 = \{a\}$) *из примеров 1–3. Знаем, что* $\{d\}$ *и* $\{a,d\}$ *— конфигурации в* $\mathcal{E}_1$. *Видим, что эти конфигурации не являются лево-замкнутыми относительно* $<_1$, *хотя начальная конфигурация лево-замкнута относительно* $<_1$. *То же верно и для конфигурации* $\{b\}$ *в необладающей свойством СПСЗ РПСС* $\mathcal{E}_2$ ($E_2 = \{a,b\}$; $<_2 = \{(a,b)\}$; $C_0^2 = \emptyset$) *из примеров 2–3.*

Легко проверить, что в обладающих свойством СПСЗ РПСС $\mathcal{E}_4$ *и* $\mathcal{E}_5$ *из примеров 2–3 все конфигурации, включая начальную, конечны, лево-замкнуты относительно* $<$ *и бесконфликтны.* ◇

Класс РПСС, обладающих свойством СПСЗ и имеющих в качестве начальной конфигурации конечное, лево-замкнутое относительно $<$ и бесконфликтное множество событий, обозначим через $c\mathcal{RPES}$.

3. Остаточные структуры

Оператор удаления для РПСС, основанный на удалении из РПСС уже произошедших неотменяемых событий вместе с предшествующими им по ПСЗ и конфликтующими с ними событиями, необходим для построения остаточных структур.

Введем определение оператора удаления для РПСС, используя понятие конфигурации.

Определение 5. *Пусть* $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, F, \prec, \rhd, C_0) \in c\mathcal{RPES}$ *и* $C \in Conf(\mathcal{E})$. Остаточная структура $\mathcal{E} \setminus C$ *для РПСС* $\mathcal{E}$ *после конфигурации* C *при применении оператора* $\setminus$ *удаления определяется следующим образом:* $\mathcal{E} \setminus C = (E',\ <' = < \cap\ (E' \times E'),\ \sharp' = \sharp \cap (E' \times E'),\ F' = (F \cap E'),\ \prec' = \prec \cap\ (E' \times \underline{F}'),\ \rhd' = \rhd \cap\ (E' \times \underline{F}'),\ C_0' = C \cap E')$, *где* $E' = E \setminus \big(\widetilde{C} \cup \sharp(\widetilde{C})\big)$ *и*

– $\widetilde{C} = \lfloor C \setminus F \rfloor_{\leq} = \{e' \in E \mid \exists e \in (C \setminus F)\ :\ e' \leq e\}$,

– $\sharp(\widetilde{C}) = \{e' \in E \mid \exists e \in \widetilde{C} \colon e' \ \sharp\ e\}$.

Интуитивная интерпретация приведенного выше определения оператора удаления заключается в следующем. Множество событий остаточной структуры $\mathcal{E} \setminus C$ формируется из множества событий исходной РПСС $\mathcal{E}$ посредством удаления событий, присутствующих в конфигурации C и являющихся неотменяемыми, вместе с предшествующими им по ПСЗ и конфликтующими с ними событиями, что приводит к редукции всех отношений и начальной конфигурации. Тогда как отменяемые события сохраняются в остатке, поскольку они могут быть отменены в последующих шагах.

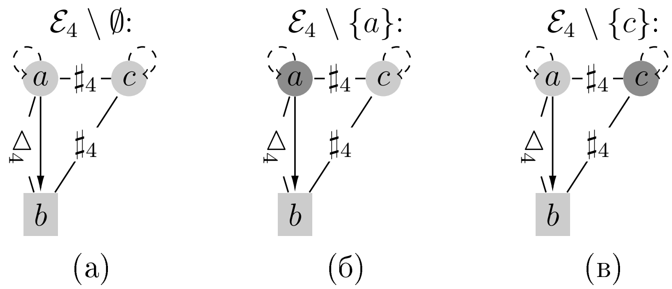

Рисунок 2: Остаточные структуры для $\mathcal{E}_4$

Пример 5. *Рассмотрим обладающую свойством СПСЗ РПСС $\mathcal{E}_4$ из примеров 2–4 с компонентами: $E_4 = \{a, b, c\}$; $<_4 = \{(a, b)\}$; $\sharp_4 = \{(a, c),\ (c, a),\ (b, c),\ (c, b)\}$; $F_4 = \{a, c\}$; $\prec_4 = \{(a, \underline{a}), (c, \underline{c})\}$; $\rhd_4 = \{(b, \underline{a})\}$; $C_0^4 = \emptyset$. Знаем, что конфигурации в $\mathcal{E}_4$ — это множества $\emptyset$, $\{a\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$.*

Построим остаточные структуры для РПСС $\mathcal{E}_4$ после её конфигураций:

- $\tilde{\mathcal{E}}_4 = \mathcal{E}_4 \setminus \emptyset = (E_4,\ <_4,\ \sharp_4,\ F_4,\ \prec_4,\ \rhd_4,\ C_0^4)$ *(см. рис. 2(а));*
- $\hat{\mathcal{E}}_4 = \mathcal{E}_4 \setminus \{a\} = (\hat{E} = E_4,\ \hat{<} = <_4,\ \hat{\sharp} = \sharp_4,\ \hat{F} = F_4,\ \hat{\prec} = \prec_4,\ \hat{\rhd} = \rhd_4,\ \hat{C}_0 = \{a\})$, *поскольку* $(\widetilde{\{a\}} \cup \sharp_4(\widetilde{\{a\}})) = \emptyset$ *благодаря тому, что $a \in F_4$ (см. рис. 2(б));*
- $\check{\mathcal{E}}_4 = \mathcal{E}_4 \setminus \{c\} = (\check{E} = E_4,\ \check{<} = <_4,\ \check{\sharp} = \sharp_4,\ \check{F} = F_4,\ \check{\prec} = \prec_4,\ \check{\rhd} = \rhd_4,\ \check{C}_0 = \{c\})$, *так как* $(\widetilde{\{c\}} \cup \sharp_4(\widetilde{\{c\}})) = \emptyset$ *в силу того, что $c \in F_4$ (см. рис. 2(в));*
- $\grave{\mathcal{E}}_4 = \mathcal{E}_4 \setminus \{a, b\} = (\grave{E} = \emptyset,\ \grave{<} = \emptyset,\ \grave{\sharp} = \emptyset,\ \grave{F} = \emptyset,\ \grave{\prec} = \emptyset,\ \grave{\rhd} = \emptyset,\ \grave{C}_0 = \emptyset)$, *поскольку* $(\widetilde{\{a, b\}} \cup \sharp_4(\widetilde{\{a, b\}})) = \{a, b, c\}$, *по причине того, что $b \notin F_4$, $a <_4 b$ и $a \sharp_4 c$, $b \sharp_4 c$.*

Далее рассмотрим обладающую свойством СПСЗ РПСС $\mathcal{E}_5$ из примеров 2–4 с компонентами: $E_5 = \{a, b, c\}$; $<_5 = \emptyset$; $\sharp_5 = \{(a, c), (c, a)\}$; $F_5 = \{b\}$; $\prec_5 = \{(b, \underline{b})\}$; $\rhd_5 = \emptyset$; $C_0^5 = \emptyset$. Знаем, что конфигурации в $\mathcal{E}_5$ — это множества $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$.

Построим остаточные структуры для РПСС $\mathcal{E}_5$ после её конфигураций:

- $\tilde{\mathcal{E}}_5 = \mathcal{E}_5 \setminus \emptyset = (E_5,\ <_5,\ \sharp_5,\ F_5,\ \prec_5,\ \rhd_5,\ C_0^5)$ *(см. рис. 3(а));*

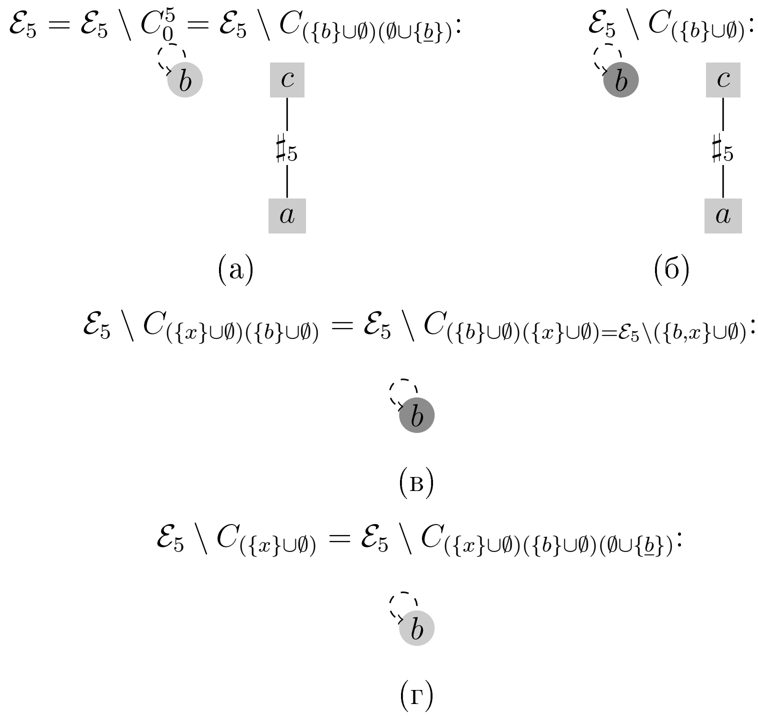

Рисунок 3: Остаточные структуры для $\mathcal{E}_5$

– $\breve{\mathcal{E}}_5 = \mathcal{E}_5 \setminus \{x\} = (\breve{E} = \{b\},\ \breve{<} = \emptyset,\ \breve{\sharp} = \emptyset,\ \breve{F} = \{b\},\ \breve{\prec} = \{(b, \underline{b})\},\ \breve{\rhd} = \emptyset,\ \breve{C}_0 = \emptyset)$, *так как* $\widetilde{\{x\}} = \{x\}$, *поскольку* $\{x\} = \{x\} \setminus (F_5 = \{b\})$, *и* $\sharp_5(\widetilde{\{x\}}) = \{x'\}$, *поскольку* $x \ \sharp_5\ x'$, *где* $x \neq x' \in \{a, c\}$ *(см. рис. 3(б));*

– $\hat{\mathcal{E}}_5 = \mathcal{E}_5 \setminus \{b\} = (\hat{E} = E_5,\ \hat{<} = <_5,\ \hat{\sharp} = \sharp_5,\ \hat{F} = F_5,\ \hat{\prec} = \prec_5,\ \hat{\rhd} = \rhd_5,\ \hat{C}_0 = \{b\})$, *поскольку* $(\widetilde{\{b\}} \cup \sharp_5(\widetilde{\{b\}})) = \emptyset$ *благодаря тому, что* $b \in F_5$ *(см. рис. 3(в));*

– $\grave{\mathcal{E}}_5 = (\mathcal{E}_5 \setminus \{b, x\} = (\grave{E} = \{b\},\ \grave{<} = \emptyset,\ \grave{\sharp} = \emptyset,\ \grave{F} = \{b\},\ \grave{\prec} = \{(b, \underline{b})\},\ \grave{\rhd} = \emptyset,\ \grave{C}_0 = \{b\})$, *потому что* $\widetilde{\{b, x\}} = \{x\}$, *в силу* $\{x\} = \{b, x\} \setminus F_5 = \{b\}$, *и* $\sharp_5(\widetilde{\{b, x\}}) = \{x'\}$ *в силу* $x \ \sharp_5\ x'$, *где* $x \neq x' \in \{a, c\}$ *(см. рис. 3(г)).* ◇

Ниже приведены характерные свойства оператора удаления.

Лемма 2. *Пусть* $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, F, \prec, \rhd, C_0) \in c\mathcal{RPES}$, C *— конфигурация в* $\mathcal{E}$ *и* $\mathcal{E} \setminus C = (E',\ <',\ \sharp',\ F',\ \prec',\ \rhd',\ C_0')$. *Тогда верно:*

(а) $E' \subseteq E,\ F' \subseteq F,\ C_0' \subseteq C,\ \nabla' \subseteq \nabla\ (\nabla \in \{<, \sharp, \prec, \rhd\})$;

(б) $\mathcal{E} \setminus C \in c\mathcal{RPES}$;

(в) $\widetilde{C} \subseteq C$.

Доказательство: См. приложение. □

Следующие два утверждения демонстрируют композиционные свойства оператора удаления для РПСС, принадлежащей классу $c\mathcal{RPES}$.

Утверждение 1. *Пусть* $\mathcal{E} \in c\mathcal{RPES}$, $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \setminus C$ *и* $C'_0 \overset{(A \cup \underline{B})}{\to} C'$ *в* $\mathcal{E}'$. *Тогда верно:* $C \overset{(A \cup \underline{B})}{\to} C''$ *в* $\mathcal{E}$ *и* $\mathcal{E} \setminus C'' = \mathcal{E}' \setminus C'$.

Доказательство: См. приложение. □

Таким образом, оказалось, что в РПСС $\mathcal{E}$ из класса $c\mathcal{RPES}$ с конфигурацией C шаг, возможный из начальной конфигурации в остаточной структуре $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \setminus C$ и приводящий в конфигурацию C', также возможен из конфигурации C в исходной РПСС $\mathcal{E}$, приводя в конфигурацию C'', и, кроме того, остаточные структуры $\mathcal{E} \setminus C''$ и $\mathcal{E}' \setminus C'$ совпадают.

Пример 6. *Сначала рассмотрим непринадлежащую классу* $c\mathcal{RPES}$ *РПСС* $\mathcal{E}_3$ *из примеров 2–3 с компонентами:* $E_3 = \{a, b\}$; $<_3 = \emptyset$; $\sharp_3 = \emptyset$; $F_3 = \{a\}$; $\prec_3 = \{(a, \underline{a})\}$; $\rhd_3 = \{(b, \underline{a})\}$; $C^3_0 = \emptyset$. *Как было показано в примере 2,* $\{a, b\}$ *— конфигурация в* $\mathcal{E}_3$. *Построим остаточную структуры для* $\mathcal{E}_3$ *после* $\{a, b\}$ *при применении оператора* $\setminus$ *удаления следующим образом:*

$\mathcal{E}_3 \setminus \{a, b\} = (E' = \{a\}$, $<' = \emptyset$, $\sharp' = \emptyset$; $F' = \{a\}$; $\prec' = \{(a, \underline{a})\}$; $\rhd' = \emptyset$, $C'_0 = \{a\})$, *так как* $\widetilde{\{a, b\}} = \{b\}$, *благодаря* $b \in \{a, b\} \setminus F_3$, *и* $\sharp_3(\widetilde{\{a, b\}}) = \emptyset$, *благодаря* $\sharp_3 = \emptyset$.

Тогда получаем, что выполняется $C'_0 \overset{(\emptyset \cup \{\underline{a}\})}{\to} C'$ *в* $\mathcal{E}_3 \setminus \{a, b\}$, *однако неверно* $\{a, b\} \overset{(\emptyset \cup \{\underline{a}\})}{\to} C'$ *в* $\mathcal{E}_3$.

Используя примеры 2 и 5, нетрудно убедиться в том, что утверждение 1 верно для РПСС $\mathcal{E}_4$ *и* $\mathcal{E}_5$ *из класса* $c\mathcal{RPES}$. ◇

Ниже устанавливается, что в РПСС $\mathcal{E}$ из класса $c\mathcal{RPES}$ шаг, возможный из конфигурации C' и приводящий в конфигурацию C'', также возможен из начальной конфигурации остаточной структуры $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \setminus C'$, приводя в конфигурацию C, и, кроме того, остаточные структуры $\mathcal{E} \setminus C''$ и $\mathcal{E}' \setminus C$ совпадают.

Утверждение 2. *Пусть* $\mathcal{E} \in c\mathcal{RPES}$ *и* $C' \overset{(A \cup \underline{B})}{\to} C''$ *в* $\mathcal{E}$. *Тогда верно:* $C'_0 \overset{(A \cup \underline{B})}{\to} C$ *в* $\mathcal{E} \setminus C'$ *и* $\mathcal{E} \setminus C'' = (\mathcal{E} \setminus C') \setminus C$.

Доказательство: См. приложение. □

Пример 7. *Рассмотрим непринадлежащую классу* $c\mathcal{RPES}$ *РПСС* $\mathcal{E}_1$ *из примеров 1–4 с компонентами:* $E_1 = \{a, b, c, d\}$; $<_1 = \{(b, c), (b, d)\}$; $\sharp_1 = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (c, d), (d, c)\}$; $F_1 = \{a, b\}$; $\prec_1 = \{(a, \underline{a}), (b, \underline{b})\}$; $\rhd_1 = \{(c, \underline{b})\}$; $C^1_0 = \{a\}$. *Знаем, что множества* $\{b, d\}$, $\{d\}$ *— конфигурации в РПСС* $\mathcal{E}_1$. *Проверим конфигурацию* $\{b, d\}$. *Используя определение 5, получаем остаточную структуру* $\mathcal{E}_1 \setminus \{b, d\} = (E'_1 = \emptyset$, $<'_1 = \emptyset$, $\sharp'_1 = \emptyset$, $F'_1 = \emptyset$, $\prec'_1 = \emptyset$, $\rhd'_1 = \emptyset$, $C'^1_0 = \emptyset)$, *поскольку* $\widetilde{\{b, d\}} = \{b, d\}$, *благодаря* $\{b, d\} = \lfloor\{b, d\} \setminus F_1 =$

$\{a,b\}\rfloor_{\le 1=\{(b,c),(b,d)\}}$, и $\sharp_1(\widetilde{\{b,d\}})=\{a,c\}$, благодаря $(b,a),(d,c)\in\sharp_1$. В РПСС $\mathcal{E}_1$ из конфигурации $\{b,d\}$ возможен шаг $(\emptyset,\cup\{\underline{b}\})$, приводящий в конфигурацию $\{d\}$, однако такой шаг невозможен из конфигурации $C_0'^1$ в РПСС $\mathcal{E}_1\setminus\{b,d\}$.

Используя примеры 2 и 5, нетрудно проверить, что утверждение 2 справедливо для РПСС $\mathcal{E}_4$ и $\mathcal{E}_5$ из класса $c\mathcal{RPES}$. ◇

4. Семантика систем переходов для РПСС

В этом разделе сначала приводятся базовые определения, касающиеся систем переходов, а затем для РПСС $\mathcal{E}$ определяются отображения $TC(\mathcal{E})$ и $TE(\mathcal{E})$, которые строят два различных типа систем переходов.

На основе множества E событий в РПСС определим множество $\mathbb{L} := 2^E$ (множество подмножеств множества E), которое будем использовать как множество меток в системах переходов.

Система переходов $\mathcal{T}=(S,\to,i)$, помеченная на множестве $\mathbb{L}$ меток, состоит из множества S состояний, отношения перехода $\to\subseteq S\times\mathbb{L}\times S$ и начального состояния $i\in S$. Две системы переходов, помеченные на множестве $\mathbb{L}$, являются *изоморфными*, если существует биекция между их состояниями, сохраняющая отношение перехода и начальное состояние. Будем говорить, что отношение $R\subseteq S\times S'$ является *бисимуляцией* между системами переходов $\mathcal{T}=(S,\to,i)$ и $\mathcal{T}'=(S',\to',i')$, помеченными на $\mathbb{L}$, если $(i,i')\in R$ и для всех пар $(s,s')\in R$ и меток $\lambda\in\mathbb{L}$: если $(s,\lambda,s_1)\in\to$, то $(s',\lambda,s_1')\in\to'$ и $(s_1,s_1')\in R$ для некоторого состояния $s_1'\in S'$; а также если $(s',\lambda,s_1')\in\to'$, то $(s,\lambda,s_1)\in\to$ и $(s_1,s_1')\in R$ для некоторого состояния $s_1\in S$. Две системы переходов, помеченные на множестве $\mathbb{L}$, являются *бисимуляционными*, если существует отношение бисимуляции между ними.

Определим понятие системы переходов, имеющей в качестве состояний конфигурации РПСС.

Определение 6. *Для РПСС $\mathcal{E}=(E,<,\sharp,F,\prec,\rhd,C_0)$*

$TC(\mathcal{E})$ — конфигурационная система переходов $(Conf(\mathcal{E}),\ \to,\ C_0)$, *помеченная на множестве $\mathbb{L}$ меток,*

где $C \overset{(A\cup\underline{B})}{\to} C'$ в $TC(\mathcal{E}) \iff C \overset{(A\cup\underline{B})}{\to} C'$ в $\mathcal{E}$.

Объясним приведенное выше определение на примере.

Пример 8. *Рассмотрим РПСС $\mathcal{E}_4 \in c\mathcal{RPES}$ из примеров 2–6. В примере 2, сказано, что множества $\emptyset$, $\{a\}$, $\{a,b\}$, $\{c\}$ — конфигурации в $\mathcal{E}_4$, и показаны возможные переходы между этими конфигурациями. Используя определение 6, получаем конфигурационную систему переходов для РПСС $TC(\mathcal{E}_4)$, которая показана на рис. 4.*

Перейдем к РПСС $\mathcal{E}_5 \in c\mathcal{RPES}$ из примеров 2–6. В примере 2 видим, что $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{b,c\}$ — конфигурации в $\mathcal{E}_5$, там же показаны возможные переходы между этими конфигурациями. Используя определение 6, строим конфигурационную систему переходов для РПСС $TC(\mathcal{E}_5)$, которая изображена на рис. 5. $\diamond$

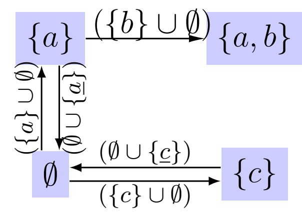

Рисунок 4: Конфигурационная система переходов $TC(\mathcal{E}_4)$

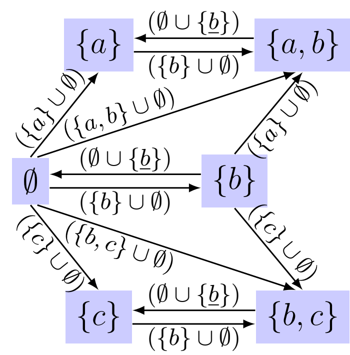

Рисунок 5: Конфигурационная система переходов $TC(\mathcal{E}_5)$

Теперь рассмотрим определение системы переходов, имеющей в качестве состояний остаточные структуры для РПСС после её конфигураций.

Определение 7. *Для РПСС $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, F, \prec, \rhd, C_0)$*

$TE(\mathcal{E})$ — остаточная система переходов $(Reach(\mathcal{E}), \rightharpoonup, \mathcal{E} \setminus C_0)$, *помеченная на множестве $\mathbb{L}$ меток,*

где $\mathcal{F} \overset{(A \cup \underline{B})}{\rightharpoonup} \mathcal{F}'$ в $TE(\mathcal{E}) \iff C_0 \overset{(A \cup \underline{B})}{\rightarrow} C$ в $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus C$,

$Reach(\mathcal{E}) = \{\mathcal{F} \mid \exists \mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_k \ (k \geq 0)$ такие, что $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} \setminus C_0$, $\mathcal{E}_k = \mathcal{F}$ и $\mathcal{E}_i \overset{(A \cup \underline{B})}{\rightharpoonup} \mathcal{E}_{i+1}$ $(0 \leq i < k)\}$.

Проиллюстрируем данное определение на примере.

Пример 9. *Рассмотрим РПСС $\mathcal{E}_4 \in c\mathcal{RPES}$ из примеров 2–6. Используя определения 5 и 7, получаем остаточную систему переходов $TE(\mathcal{E}_4)$, которая показана на рис. 6. Видим, что конфигурационная система переходов $TC(\mathcal{E}_4)$ (см. рис. 4) и остаточная система переходов $TE(\mathcal{E}_4)$ являются изоморфными.*

Рассмотрим РПСС $\mathcal{E}_5 \in c\mathcal{RPES}$ из примеров 2–6. Используя определения 5 и 7, построим остаточную систему переходов $TE(\mathcal{E}_5)$ (см. рис. 7). Видим, что конфигурационная система переходов $TC(\mathcal{E}_5)$ (см. рис. 5) и остаточная система переходов $TE(\mathcal{E}_5)$ являются бисимуляционно эквивалентными, но не изоморфными. ◇

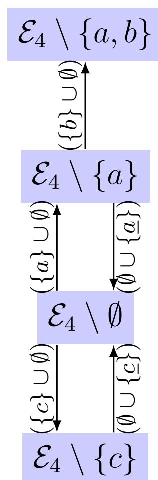

Рисунок 6: Остаточная система переходов $TE(\mathcal{E}_4)$

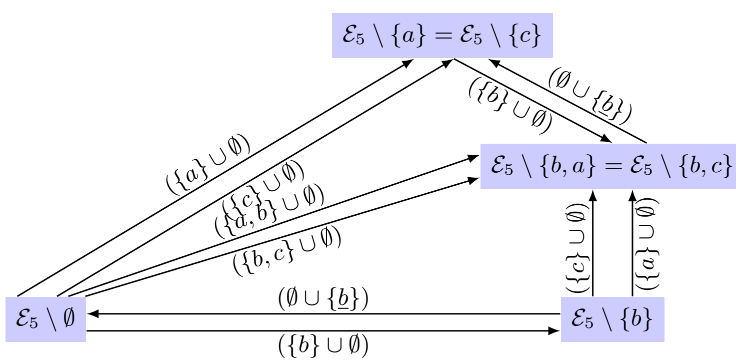

Рисунок 7: Остаточная система переходов $TE(\mathcal{E}_5)$

Установим взаимосвязи между состояниями и переходами конфигурационной и остаточной систем переходов для РПСС из класса $c\mathcal{RPES}$.

Утверждение 3. *Для РПСС $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, F, \prec, \rhd, C_0) \in c\mathcal{RPES}$ верно:*

(a) для любой $C \in Conf(\mathcal{E})$ верно $\mathcal{E} \setminus C \in Reach(\mathcal{E})$;

(б) *для любой* $\mathcal{E}' \in Reach(\mathcal{E})$ *существует* $C \in Conf(\mathcal{E})$ *такая, что* $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \setminus C$*;*

(в) *для любых* $C, C' \in Conf(\mathcal{E})$ *верно: если* $C \overset{(A\cup \underline{B})}{\rightarrow} C'$*, то* $\mathcal{E} \setminus C \overset{(A\cup \underline{B})}{\rightharpoondown} \mathcal{E} \setminus C'$*;*

(г) *для любых* $\mathcal{E}', \mathcal{E}'' \in Reach(\mathcal{E})$ *верно: если* $\mathcal{E}' \overset{(A\cup \underline{B})}{\rightharpoondown} \mathcal{E}''$*, то для любой* $C \in Conf(\mathcal{E})$ *такой, что* $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \setminus C$*, существует* $C' \in Conf(\mathcal{E})$ *такая, что* $\mathcal{E}'' = \mathcal{E} \setminus C'$ *и верно* $C \overset{(A\cup \underline{B})}{\rightarrow} C'$*.*

Доказательство: См. приложение. □

Установим существование бисимуляции между конфигурационной и остаточной системами переходов для РПСС из класса $c\mathcal{RPES}$.

Теорема 1. *Для РПСС* $\mathcal{E} \in c\mathcal{RPES}$ *верно, что* $TC(\mathcal{E})$ *и* $TE(\mathcal{E})$ *являются бисимуляционно эквивалентными и неизоморфными в общем случае.*

Доказательство: Из примера 9 известно, что для РПСС $\mathcal{E}_5 \in c\mathcal{RPES}$ (см. примеры 2–8) конфигурационная система переходов $TC(\mathcal{E}_5)$ (см. рис. 5) и остаточная система переходов $TE(\mathcal{E}_5)$ (см. рис. 7) не изоморфны.

Проверим, что системы $TC(\mathcal{E})$ и $TE(\mathcal{E})$ бисимуляционно эквивалентны для каждой $\mathcal{E} \in c\mathcal{RPES}$. Определим отношение R следующим образом: $R = \{(C,\ \mathcal{E} \setminus C) \mid C \in Conf(\mathcal{E})\}$. Благодаря утверждению 3(а), верно $R \subseteq Conf(\mathcal{E}) \times Reach(\mathcal{E})$.

Проверим, что отношение R является бисимуляцией между системами $TC(\mathcal{E})$ и $TE(\mathcal{E})$. Очевидно, что $C_0 \in Conf(\mathcal{E})$ и, кроме того, $(C_0,\ \mathcal{E} \setminus C_0) \in R$.

Возьмём произвольную пару $(C,\ \mathcal{E} \setminus C)$, принадлежащую отношению R. Предположим, что $C \overset{(A\cup \underline{B})}{\rightarrow} C'$ в $TC(\mathcal{E})$ для некоторой $C' \in Conf(\mathcal{E})$. Благодаря утверждению 3(в) верно, что $\mathcal{E} \setminus C \overset{(A\cup \underline{B})}{\rightharpoondown} \mathcal{E} \setminus C'$. Кроме того, по определению отношения R, имеем $(C',\ \mathcal{E} \setminus C') \in R$.

Теперь предположим существование перехода $\mathcal{E} \setminus C \overset{(A\cup \underline{B})}{\rightharpoondown} \mathcal{E}'$ в $TE(\mathcal{E})$ для некоторой $\mathcal{E}' \in Reach(\mathcal{E})$. Согласно утверждению 3(г), для конфигурации $C \in Conf(\mathcal{E})$, существует конфигурация $C' \in Conf(\mathcal{E})$ такая, что $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \setminus C'$ и $C \overset{(A\cup \underline{B})}{\rightarrow} C'$. Более того, по определению отношения R очевидно, что $(C',\ \mathcal{E} \setminus C') = (C',\ \mathcal{E}') \in R$. Следовательно, отношение R действительно является бисимуляцией. □

5. Заключение

В этой статье в контексте реверсивных первичных структур событий, сохраняющих причинно-следственные зависимости между событиями, были построены и исследованы семантики в терминах систем переходов, основанных на конфигурациях и остаточных структурах. С этой целью, во-первых, была определена истинно-параллельная (шаговая) семантика рассматриваемой модели структур событий, которая основана на конфигурациях и которая строится из начальной конфигурации посредством добавления/отмены множеств произошедших параллельных событий, называемых шагом. Во-вторых, был предложен оператор удаления, который используется для построения остаточных структур, получаемых из заданной структуры событий посредством удаления из неё уже произошедших и конфликтующих событий, а также показана корректность и композиционные свойства данного оператора.

Есть надежда, что полученные здесь результаты могут быть полезны при разработке операционных семантик алгебраических исчислений реверсивных параллельных процессов, как результаты статей [10, 16, 21, 23] при построении и изучении традиционных (нереверсивных) алгебраических исчислений.

В дальнейшем планируется расширить список рассматриваемых моделей, включив реверсивные версии потоковых, расслоенных, обобщенных структур событий с симметричным и асимметричным конфликтом. Другой целью дальнейших исследований является изучение возможности получения изоморфизма, а не бисимуляции, между двумя типами семантик систем переходов за счёт обогащения модели реверсивных структур событий событиями, которые присутствуют в структуре, но которые не могут произойти из-за, например, отсутствия транзитивности/ацикличности в ПСЗ, наличия бесконечного количества предшественников по ПСЗ и т.д., как это было сделано для традиционных (нереверсивных) моделей в статье [8].

Список литературы

1. Aman B., Ciobanu G. Controlled reversibility in reaction systems. In: Gheorghe, M., Rozenberg, G., Salomaa, A., Zandron, C. (eds.) CMC 2017. Lecture Notes in Computer Science. 2017. Vol. 10725. P. 40–53.URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-73359-3_3
2. Arbach Y., Karcher D., Peters K., Nestmann U. Dynamic causality in event structures. Lecture Notes in Computer Science. 2015. Vol. 9039. P. 83–97. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-19195-9_6
3. Armas-Cervantes A., Baldan P., Garcia-Banuelos L. Reduction of event structures under history preserving bisimulation. J. Log. Algebr. Meth. Program. 2016. Vol. 85(6). P. 1110-1130. URL: https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2015.10.004
4. Aubert C., Cristescu I. Contextual equivalences in configuration structures and reversibility. J. Log. Algebr. Meth. Program. 2017. Vol. 86(1). P. 77–106. URL: https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2016.08.004

5. Baier C., Majster-Cederbaum M. The connection between event structure semantics and operational semantics for TCSP. Acta Informatica. 1994. Vol. 31. URL: https://doi.org/10.1007/BF01178923
6. Barylska K., Gogolinska A., Mikulski L., Philippou A., Piatkowski M., Psara K. Formal translation from reversing Petri nets to coloured Petri nets. Lecture Notes in Computer Science. 2022. Vol. 13352. P. 172–186. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-09005-9_12
7. Best E., Gribovskaya N., Virbitskaite I. Configuration- and residual-based transition systems for event structures with asymmetric conflict. Proc. SofSem 2017, Lecture Notes in Computer Science. 2017. Vol. 10139. P. 132–146. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-51963-0_11
8. Best E., Gribovskaya N., Virbitskaite I. From event-oriented models to transition systems. In: Proc. Petri Nets 2018, Lecture Notes in Computer Science. 2018. Vol. 10877. P. 117–139. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-91268-4_7
9. Boudol G. Flow event structures and flow nets. Lecture Notes in Computer Science. 1990. Vol. 469. P. 62–95. URL: https://doi.org/10.1007/3-540-53479-2_4
10. Boudol G., Castellani I. Concurrency and atomicity. Theoretical Computer Science. 1988. Vol. 59. P. 25–84. URL: https://doi.org/10.1016/0304-3975(88)90096-5
11. Crafa S., Varacca D., Yoshid N. Event structure semantics of parallel extrusion in the pi-calculus. Lecture Notes in Computer Science. 2012. Vol. 7213. P. 225–239.
12. Danos V., Krivine J. Transactions in RCCS. In: M. Abadi and L. de Alfaro, editors, Proceedings of 16th International Conference CONCUR 2005, Lecture Notes in Computer Science. 2005. Vol. 3653. P. 398–412. URL: https://doi.org/10.1007/11539452_31
13. De Vos A., De Baerdemacker S., Van Rentergem Y. Synthesis of quantum circuits vs. Synthesis of Classical Reversible Circuits. Synthesis Lectures on Digital Circuits and Systems. Morgan & Claypool Publishers, 2018. URL: https://doi.org/10.2200/S00856ED1V01Y201805DCS054
14. de Frutos Escrig D., Koutny M., Mikulski L. Reversing steps in Petri nets. In: Donatelli, S., Haar, S. (eds.) PETRI NETS 2019. Lecture Notes in Computer Science. 2019. Vol. 11522. P. 171–191. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-21571-2 11
15. van Glabbeek R.J., Plotkin G.D. Configuration structures, event structures and Petri nets. Theoretical Computer Science. 2009. Vol. 410(41). P. 4111-4159. URL: https://doi.org/10.1016/j.tcs.2009.06.014
16. van Glabbeek R.J., Vaandrager F.W. Bundle event structures and CCSP. Lecture Notes in Computer Science. 2003. Vol. 2761. P. 57–71. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-45187-7_4
17. Graversen E., Phillips I.C.C., Yoshida N. Towards a categorical representation of reversible event structures. J. Log. Algebraic Methods Program. 2019. Vol. 104. P. 16–59. URL: https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2019.01.001
18. Graversen E., Phillips I.C.C., Yoshida N. Event structure semantics of (controlled) reversible CCS. J. Log. Algebraic Methods Program. 2021. Vol. 121: 100686.

URL: https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2021.100686

19. Hoogers P.W., Kleijn H.C.M., Thiagarajan P.S. An event structure semantics for general Petri nets. Theoretical Computer Science. 1996. Vol. **153**. P. 129–170. URL: https://doi.org/10.1016/0304-3975(95)00120-4
20. Kari J. Reversible cellular automata: from fundamental classical results to recent developments. New Generation Comput. 2018. Vol. 36(3). P. 145–172. URL: https://doi.org/10.1007/s00354-018-0034-6
21. Katoen J.-P. Quantitative and qualitative extensions of event structures. PhD Thesis. Twente University. 1996.
22. Kuhn S., Aman B., Ciobanu G.,Philippou A., Psara K., Ulidowski I. Reversibility in chemical reactions. In I. Ulidowski, I. Lanese, U. P. Schultz, and C. Ferreira, editors, Reversible Computation: Extending Horizons of Computing – Selected Results of the COST Action IC1405. Lecture Notes in Computer Science. 2020. Vol. 12070. P. 151–176. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-47361-7_7
23. Langerak R. Bundle event structures: a non-interleaving semantics for LOTOS. Formal Description Techniques V. IFIP Transactions. 1993. Vol. C-10. P. 331–346.
24. Lanese I., Mezzina C.A., Stefani J.-B. Reversibility in the higher-order π-calculus. Theoretical Computer Science. 2016. Vol. 625. P. 25–84. URL: https://doi.org/10.1016/j.tcs.2016.02.019
25. Lanese I., Palacios A., Vidal G. Causal-consistent replay debugging for message passing programs. In J. A. Pérez and N. Yoshida, editors, Formal Techniques for Distributed Objects, Components, and Systems – 39th IFIP WG 6.1 International Conference, FORTE 2019. Lecture Notes in Computer Science. 2019. Vol. 11535. P. 167–184. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-21759-4_10
26. Majster-Cederbaum M., Roggenbach M. Transition systems from event structures revisited. Information Processing Letters. 1998. Vol. 67(3). P. 119-124. URL: https://doi.org/10.1016/S0020-0190(98)00105-7
27. Medic D., Mezzina C. A., Phillips I., Yoshida N. Towards a formal account for software transactional memory. In I. Lanese and M. Rawski, editors, Reversible Computation – 12th International Conference, RC 2020. Lecture Notes in Computer Science 2020. Vol. 12227. P. 255–263. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-52482-1_16
28. Melgratti H.C., Mezzina C.A., Pinna G.M. A distributed operational view of reversible prime event structures. In: 36th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS). 2021. P. 1–13. URL: https://doi: 10.1109/LICS52264.2021.9470623.
29. Philippou A., Psara K. Reversible computation in cyclic Petri nets. CoRR abs/2010.04000. 2020. URL: https://arxiv.org/abs/2010.04000
30. Phillips I.C.C., Ulidowski I. A hierarchy of reverse bisimulations on stable configuration structures. Math. Struct. Comput. Sci. 2012. Vol. 22. P. 333–372 URL: https://doi.org/10.1017/S0960129511000429
31. Phillips I.C.C., Ulidowski I. Event identifier logic. Math. Struct. Comput. Sci. 2014. Vol. 24.

P. 1–51 URL: https://doi.org/10.1017/S0960129513000510

32. Phillips I.C.C., Ulidowski I. Reversibility and asymmetric conflict in event structures. Logic and Algebraic Methods in Programming 2015. Vol. 84(6). P. 781–805
URL: https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2015.07.004
33. Pinna G.M. Reversing steps in membrane systems computations. In: Gheorghe, M., Rozenberg, G., Salomaa, A., Zandron, C. (eds.) CMC 2017. LNCS 2018. Vol. 10725. P. 245–261.
URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-73359-3 16
34. Ulidowski I., Phillips I.C.C., Yuen S. Reversing event structures. New Generation Computing 2018. Vol. 36(3). P. 281–306.
URL: https://doi.org/10.1007/s00354-018-0040-8
35. Winskel G. Events in computation. PhD Thesis. University of Edinburgh. 1980.
36. Winskel G. Introduction to event structures. *Lecture Notes in Computer Science*. 1989. Vol. 354. P. 364–397.

Приложение

Доказательство леммы 1.

Поскольку $C \in Conf(\mathcal{E})$, то по определению 3, для каждого $1 \leq i \leq n$ существуют множества $A_i \subseteq E$ и $B_i \subseteq F$ такие, что $C_{i-1} \overset{(A_i \cup \underline{B_i})}{\rightarrow} C_i$ и $C = C_n$ ($n \geq 0$). Покажем, что C_i конечно, лево-замкнуто относительно $<$ и бесконфликтно для каждого $0 \leq i \leq n$ методом математической индукции:

$i = 0$. C_0 конечно, лево-замкнуто относительно $<$ и бесконфликтно по условию леммы.

$i > 0$. Предположим, что C_i — конечно, лево-замкнуто относительно $<$ и бесконфликтно, и покажем, что множество C_{i+1} также конечно, лево-замкнуто относительно $<$ и бесконфликтно. Так как $C_i \overset{(A_{i+1} \cup \underline{B_{i+1}})}{\rightarrow} C_{i+1}$, то $C_{i+1} = (C_i \setminus B_{i+1}) \cup A_{i+1}$ и шаг $(A_{i+1} \cup \underline{B}_{i+1})$ возможен из C_i. Тогда по пункту (а) определения 3 верно, что $C_i \cup A_{i+1}$ — конечное и бесконфликтное множество. Следовательно, множество C_{i+1} также конечно и бесконфликтно как подмножество конечного и бесконфликтного множества $C_i \cup A_{i+1}$. Проверим лево-замкнутость C_{i+1}. Выберем произвольным образом событие $e \in C_{i+1}$ такое, что $x < e$ для некоторого $x \in E$. Так как $C_{i+1} = (C_i \setminus B_{i+1}) \cup A_{i+1}$, то возможны два случая:

- $e \in C_i \setminus B_{i+1} \subseteq C_i$. Из лево-замкнутости множества C_i получаем, что $x \in C_i$. Предположим, что $x \in B_{i+1} \subseteq F$. Благодаря выполнимости свойства СПСЗ для $\mathcal{E}$, верно, что $e \rhd \underline{x}$. Поскольку шаг $(A_{i+1} \cup \underline{B}_{i+1})$ возможен из C_i, то по пункту (г) определения 3 известно, что $e \notin C_i \cup A_{i+1}$, что противоречит условию $e \in C_i$. Значит, верно $x \notin B_{i+1}$. Таким образом, $x \in C_i \setminus B_{i+1} \subseteq C_{i+1}$.
- $e \in A_{i+1}$. Поскольку шаг $(A_{i+1} \cup \underline{B}_{i+1})$ возможен из C_i, то по пункту (б) определения 3 истинно, что $x \in C_i \setminus B_{i+1} \subseteq C_{i+1}$.

Следовательно, множество C_{i+1} лево-замкнуто относительно $<$. □

Доказательство леммы 2.

(а) Следует из определения 5.

(б) Для начала проверим, что построенная структура $\mathcal{E} \setminus C = (E', <', \sharp', F', \prec', \rhd', C_0')$, где $E' = E \setminus \widetilde{C} \cup \sharp(\widetilde{C})$ является РПСС. Для этого проверим все требования определения 2.

- Поскольку $\mathcal{E}$ — РПСС, то множество E счетно. По пункту (а) известно, что $E' \subseteq E$. Следовательно, множество E', являющееся подмножеством счетного множества E, счетно.

– По определению 5 верно $\sharp' = \sharp \cap\ (E' \times E') \subseteq (E' \times E')$. Благодаря тому, что $\mathcal{E}$ является РПСС, имеем, что отношение $\sharp \subseteq E \times E$ иррефлексивно и симметрично. По пункту (a) $\sharp' \subseteq \sharp$, следовательно отношение $\sharp'$ также иррефлексивно. Симметричность этого отношения следует из симметричности отношения $\sharp$ и равенства $\sharp' = \sharp \cap\ (E' \times E')$.

– В соответствии с определением 5 очевидно, что $<' = < \cap\ (E' \times E') \subseteq (E' \times E')$. Так как $\mathcal{E}$ — РПСС, то $<$ — иррефлексивный частичный порядок, множество $\lfloor e \rfloor_<$ конечно и бесконфликтно для каждого $e \in E$, и кроме того, для каждых $e, e' \in E$ верно, что если $e < e'$, то $\neg(e \ \sharp\ e')$. Поскольку $<' = < \cap\ (E' \times E')$, то в силу иррефлексивности и транзитивности отношения $<$ получаем, что отношение $<'$ также является иррефлексивным и транзитивным, то есть иррефлексивным частичным порядком. Далее по пункту (a) верно $<' \subseteq <$, и, следовательно, также истинно вложение $\lfloor e \rfloor_{<'} \subseteq \lfloor e \rfloor_<$ для любого события $e \in E'$. Значит множество $\lfloor e \rfloor_{<'}$ $(e \in E')$ конечно и бесконфликтно как подмножество конечного и бесконфликтного множества $\lfloor e \rfloor_<$. Проверим, что для каждых $e, e' \in E'$ верно, что если $e <' e'$, то $\neg(e \ \sharp'\ e')$. Предположим противное, то есть существуют $e, e' \in E'$ такие, что $e \ <' \ e'$ и $e \ \sharp'\ e'$. Благодаря пункту (a) получаем, что $e \ < \ e'$ и $e \ \sharp\ e'$, что противоречит тому, что $\mathcal{E}$ — РПСС. Значит для каждых $e, e' \in E'$ верно, что если $e \ <' \ e'$, то $\neg(e \ \sharp'\ e')$.

– По определению 5 имеем, что $F' = F \cap E'$, значит верно $F' \subseteq E'$.

– По определению 5 известно, что $\prec' = \prec \cap (E' \times F') \subseteq E' \times F'$. Более того, поскольку $\mathcal{E}$ — РПСС, то для каждого $u \in F$ верно, что $u \prec \underline{u}$ и $\llcorner u \lrcorner_\prec$ — конечное и бесконфликтное множество. По пункту (a) верно, что $F' \subseteq F$. Следовательно, для каждого $u \in F'$ истинно, что $u \prec \underline{u}$. Так как $\prec' = \prec \cap (E' \times F')$, то для каждого $u \in F' \subseteq E'$ справедливо $u \prec' \underline{u}$. Далее, по пункту (a) получаем, что $\prec' \subseteq \prec$, а значит истинно вложение $\llcorner u \lrcorner_{\prec'} \subseteq \llcorner u \lrcorner_\prec$. Таким образом, множество $\llcorner u \lrcorner_{\prec'}$ — конечно и бесконфликтно как подмножество конечного и бесконфликтного множества $\llcorner u \lrcorner_\prec$.

– По определению 5 имеем, что $\rhd' = \rhd \cap (E' \times F') \subseteq E' \times \underline{F}'$. Выберем произвольным образом $u \in F'$ и $e \in E'$ такие, что $e \prec' \underline{u}$ и покажем, что $\neg(e \rhd' \underline{u})$. По пункту (a) верно $e \prec \underline{u}$. Благодаря тому, что $\mathcal{E}$ является РПСС, истинно $\neg(e \rhd \underline{u})$. Вновь по пункту (a) имеем, что $\rhd' \subseteq \rhd$. Отсюда получаем, что $\neg(e \rhd' \underline{u})$.

– Пусть $\ll'$ определено по правилу: $e \ll' e'$, если и только если $e <' e'$, а также $e' \ \rhd' \ \underline{e}$, если $e \in F'$. Проверим, что отношение конфликта $\sharp'$ наследуется по $\ll'$. Пусть $e, e', e'' \in E'$ и $e \ \sharp' \ e' \ll' e''$. Поскольку $e' \ll e''$, имеем, что $e' <' e''$ и $e'' \ \rhd' \ \underline{e'}$, если $e' \in F'$. Заметим, что из пункта (a) следует, что $\sharp' \subseteq \sharp$, $<' \subseteq <$, $\rhd' \subseteq \rhd$ и $F' \subseteq F$. Отсюда получаем, что $e \ \sharp \ e'$, $e' < e''$ и $e'' \ \rhd \ \underline{e'}$, если $e' \in F'$. Поскольку $F' = F \cap E'$ по определению 5, то верно: $e' \ll e''$. Так как $\mathcal{E}$ — РПСС, то отношение конфликта $\sharp$ наследуется по $\ll$, и, следовательно, $e \ \sharp \ e''$. Благодаря определению 5, поскольку $e, e'' \in E'$, верно, что $e \ \sharp' \ e''$.

– По определению 5 справедливо $C'_0 = C \cap E'$, и, следовательно, $C'_0 \subseteq E'$.

Таким образом, мы убедились в том, что $\mathcal{E} \setminus C$ является РПСС. Теперь проверим, что $\mathcal{E} \setminus C \in c\mathcal{RPES}$. Для начала покажем, что $\mathcal{E} \setminus C$ обладает свойством СПСЗ. Возьмем произвольные события $e \in E'$ и $u \in F'$.

– Проверим истинность $e \prec' \underline{u} \ \Leftrightarrow \ e = u$.

Пусть $e \prec' \underline{u}$. Из пункта (a) следует $e \prec \underline{u}$. Так как $\mathcal{E}$ обладает свойством СПСЗ, то $e = u$.

Теперь предположим $e = u$. Поскольку $\mathcal{E} \setminus C$ является РПСС, то $u \prec' \underline{u}$ для всех $u \in F'$. Значит, справедливо $e \prec' \underline{u} \ \Leftrightarrow \ e = u$.

– Проверим истинность $e \rhd' \underline{u} \ \Leftrightarrow \ u <' e$.

Пусть $e \rhd' \underline{u}$ (или $u <' e$). Из пункта (a) следует $e \rhd \underline{u}$ (или $u < e$). Так как $\mathcal{E}$ обладает свойством СПСЗ, то $u < e$ (или $e \rhd \underline{u}$). Поскольку имеем $e \in E'$ и $u \in F' \subseteq E'$, то справедливо $u <' e$ ($e \rhd' \underline{u}$), согласно определению 5.

Таким образом, получаем, что $\mathcal{E} \setminus C$ обладает свойством СПСЗ.

Осталось проверить, что начальная конфигурация C'_0 является конечным, лево-замкнутым относительно $<'$ и бесконфликтным множеством. Так как $\mathcal{E} \in c\mathcal{RPES}$, то C_0 — конечное, лево-замкнутое относительно $<$ и бесконфликтное множество. Тогда по лемме 1 заключаем, что конфигурация C также является конечным, лево-замкнутым относительно $<$ и бесконфликтным множеством. Вложение $C'_0 \subseteq C$ истинно по лемме 2(a). Тогда множество C'_0 конечно и бесконфликтно как подмножество конечного и бесконфликтного множества C. Проверим, что C'_0 лево-замкнуто относительно $<'$. Возьмем произвольные события $x \in C'_0$ и $y \in E'$ такие, что $y <' x$. Благодаря лемме 2(a) верно $y < x$ и $x \in C$. Так как множество C лево-замкнуто относительно $<$, то $y \in C$. Согласно определению 5 верно $C'_0 = C \cap E'$. Отсюда, поскольку $y \in E'$, получаем, что $y \in C'_0$, что доказывает лево-замкнутость множества C'_0.

(в) Пусть $a \in \widetilde{C}$. По определению 5, существует $e \in (C \setminus F) \subseteq C$ такое, что $a \leq e$. Из леммы 1 знаем, что конфигурация C лево-замкнута относительно отношения $<$. Отсюда следует $a \in C$. Значит, верно $\widetilde{C} \subseteq C$. □

Доказательство утверждения 1.

Предположим $\mathcal{E} \in c\mathcal{RPES}$ и $C \in Conf(\mathcal{E})$. По определению 5, определим $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \setminus C = (E', <' = < \cap (E' \times E'), \sharp' = \sharp \cap (E' \times E'), F' = (F \cap E'), \prec' = \prec \cap (E' \times \underline{F}'), \rhd' = \rhd \cap (E' \times \underline{F}'), C'_0 = C \cap E')$, где $E' = E \setminus \big(\widetilde{C} \cup \sharp(\widetilde{C})\big)$. И пусть $C' \in Conf(\mathcal{E}')$ такая, что $C'_0 \overset{(A \cup \underline{B})}{\to} C'$ в $\mathcal{E}'$. Это означает, что $C'_0 \subseteq E'$ — конечное и бескофликтное множество, $A \subseteq E'$, $B \subseteq F'$, шаг $(A \cup \underline{B})$ возможен из C'_0 в $\mathcal{E}'$ и $C' = (C'_0 \setminus B) \cup A$. Из леммы 2(а) известно, что $E' \subseteq E$ и $F' \subseteq F$, что позволяет сделать вывод о том, что $A \subseteq E$ и $B \subseteq F$. Более того, поскольку $\mathcal{E} \in c\mathcal{RPES}$, то C_0 — конечное, лево-замкнутое относительно отношения $<$ и бесконфликтное множество событий. Отсюда, благодаря лемме 1, получаем конечность, бесконфликтность и лево-замкнутость множества C.

Убедимся, что шаг $(A \cup \underline{B})$ возможен из C в $\mathcal{E}$. Проверим выполнение пунктов (а)–(г) определения 3.

(а) Так как шаг $(A \cup \underline{B})$ возможен из C'_0 в $\mathcal{E}'$, то $A \cap C'_0 = \emptyset$, $B \subseteq C'_0$ и $(C'_0 \cup A)$ — конечное и бесконфликтное множество. По определению 5 верно: $C'_0 = C' \cap E'$. Отсюда, поскольку $A \subseteq E'$ и $A \cap C'_0 = \emptyset$, то истинно $A \cap C = A \cap E' \cap C = \emptyset$. Согласно лемме 2(а), верно $C'_0 \subseteq C$. Значит, $B \subseteq C$. Заметим, что множество A, являющееся подмножеством конечного и бесконфликтного множества $(C'_0 \cup A)$, конечно и бесконфликтно. Тогда множество $C \cup A$ конечно как объединение двух конечных множеств. Осталось проверить бесконфликтность этого множества. Предположим обратное, то есть пусть существуют события $e, e' \in C \cup A$ такие, что $e \sharp e'$. Так как множества C и A являются бесконфликтными, то без ограничения общности можно считать, что $e \in A \subseteq E'$ и $e' \in C$. Рассмотрим два возможных случая:

1. $e' \in E'$. Тогда верно $e' \in C \cap E' = C'_0$. Следовательно, по определению 5, истинно $e \sharp' e'$, что противоречит бесконфликтности множества $C'_0 \cup A$, т.е. определению 3(а).
2. $e' \notin E'$. Поскольку $E' = E \setminus \widetilde{C} \cup \sharp(\widetilde{C})$, то $e' \in \widetilde{C} \cup \sharp(\widetilde{C})$.
   - $e' \in \widetilde{C}$. Поскольку $e \sharp e'$, то истинно $e \in \sharp(\widetilde{C})$, и, следовательно событие

e не принадлежит множеству E', что противоречит вложению $A \subseteq E'$, т.е. условию определения 3.

– $e' \in \sharp(\widetilde{C})$. По определению 5 существует событие $v \in \widetilde{C}$ такое, что $e' \sharp v$. По пункту (в) леммы 2 известно, что $\widetilde{C} \subseteq C$. Следовательно верно, что $v \in C$. Так как $e' \sharp v$, то пришли к противоречию с бесконфликтностью множества C, т. е. с леммой 1.

Таким образом, множество $C \cup A$ бесконфликтно.

(б) Пусть $e \in A$, $e' \in E$ и $e' < e$. Рассмотрим два допустимых случая:

1. $e' \in E'$. Согласно определению 5 получаем, что $e' <' e$. Так как шаг $(A \cup \underline{B})$ возможен из C'_0 в $\mathcal{E}'$, то событие e' принадлежит множеству $C'_0 \setminus B$ и $B \subseteq C'_0$. Согласно лемме 2 (а), верно $C'_0 \subseteq C$. Значит, $e' \in C \setminus B$.
2. $e' \notin E'$. Согласно определению 5 имеем, что $e' \in \widetilde{C} \cup \sharp(\widetilde{C})$. Покажем, что $e' \in \widetilde{C}$. Предположим противное, то есть $e' \in \sharp(\widetilde{C})$. По определению 5 существует событие $v \in \widetilde{C}$ такое, что $e' \sharp v$. Поскольку РПСС $\mathcal{E}$ обладает свойством СПСЗ и $e' < e$, то верно $e' \ll e$. Согласно определению 2, так как $v \sharp e' \ll e$, то $v \sharp e$, то есть $e \in \sharp(\widetilde{C})$, что противоречит принадлежности события e множеству E'. Значит, истинно $e' \in \widetilde{C}$. По пункту (в) леммы 2 известно, что $\widetilde{C} \subseteq C$, то есть $e' \in C$. Более того, поскольку $e' \notin E'$ и $B \subseteq E'$, то верно $e' \notin B$. Следовательно, получаем, что $e' \in C \setminus B$.

(в) Пусть $e \in B$, $e' \in E$ и $e' \prec \underline{e}$. Поскольку РПСС $\mathcal{E}$ обладает свойством СПСЗ, то $e' \prec \underline{e}$ тогда и только тогда, когда $e' = e$. Далее, так как $e \in B \subseteq C$, то $e' = e \in C \setminus (B \setminus \{e\})$.

(г) Пусть $e \in B$, $e' \in E$ и $e' \rhd \underline{e}$. Проверим два возможных варианта:

1. $e' \in E'$. Благодаря определению 5 верно $e' \rhd' \underline{e}$. Так как шаг $(A \cup \underline{B})$ возможен из C'_0 в $\mathcal{E}'$, то $e' \notin (C'_0 \cup A)$. Согласно определению 5, верно $C'_0 = C \cap E'$. Поскольку $e' \in E'$, то $e' \notin C \cup A$.
2. $e' \notin E'$. По определению 5 имеем $e' \in \widetilde{C} \cup \sharp(\widetilde{C})$. Покажем, что $e' \in \sharp(\widetilde{C})$. Предположим противное, то есть $e' \in \widetilde{C}$. По Определению 5 это означает существование события $v \in C \setminus F$ такого, что $e' \leq v$. Поскольку РПСС $\mathcal{E}$ обладает свойством СПСЗ и $e' \rhd \underline{e}$, то $e < e'$. Тогда, по транзитивности отношения $<$ получаем, что $e \leq v$, то есть $e \in \widetilde{C}$, что противоречит вложению $B \subseteq F' \subseteq E'$, т.е. определению 3. Таким образом, имеем $e' \in \sharp(\widetilde{C})$. Согласно определению 5, существует событие $c \in \widetilde{C}$ такое, что $e' \sharp c$. Далее, по леммы 2(а), известно $\widetilde{C} \subseteq C$. Поскольку

$C \cup A$ бесконфликтное множество, то $e' \notin C \cup A$.

Таким образом, шаг $(A \cup \underline{B})$ возможен из C в $\mathcal{E}$. Следовательно, получаем $C \overset{(A \cup \underline{B})}{\to} C''$ в $\mathcal{E}$ и $C'' = (C \setminus B) \cup A$.

Осталось показать, что $\mathcal{E} \setminus C'' = \mathcal{E}' \setminus C'$. Напомним, что по определению 5 верно:

- $\mathcal{E}' = (E',\ <' = < \cap\ (E' \times E'),\ \sharp' = \sharp \cap (E' \times E'),\ F' = (F \cap E'),\ \prec' = \prec \cap\ (E' \times \underline{F'}),$ $\rhd' = \rhd \cap\ (E' \times \underline{F'}),\ C'_0 = C' \cap E')$, где $E' = E \setminus \big(\widetilde{C} \cup \sharp(\widetilde{C})\big)$;
- $\mathcal{E}' \setminus C' = (\overline{E},\ \overline{<} = <' \cap\ (\overline{E} \times \overline{E}),\ \overline{\sharp} = \sharp' \cap (\overline{E} \times \overline{E}),\ \overline{F} = (F' \cap \overline{E}),\ \overline{\prec} = \prec' \cap\ (\overline{E} \times \underline{\overline{F}}),$ $\overline{\rhd} = \rhd' \cap\ (\overline{E} \times \underline{\overline{F}}),\ \overline{C}_0 = C' \cap \overline{E})$, где $\overline{E} = E' \setminus \big(\widetilde{C'} \cup \sharp'(\widetilde{C'})\big)$;
- $\mathcal{E} \setminus C'' = (E'',\ <'' = < \cap\ (E'' \times E''),\ \sharp'' = \sharp \cap (E'' \times E''),\ F'' = (F \cap E''),\ \prec'' = \prec \cap\ (E'' \times \underline{F''}),$ $\rhd'' = \rhd \cap\ (E'' \times \underline{F''}),\ C''_0 = C'' \cap E'')$, где $E'' = E \setminus \big(\widetilde{C''} \cup \sharp(\widetilde{C''})\big)$.

Сначала проверим, что верно $E'' = \overline{E}$. Для этого установим истинность следующих вложений.

1. $\widetilde{C''} \subseteq (\widetilde{C} \cup \widetilde{C'})$. Пусть $x \in \widetilde{C''}$. Тогда существует $y \in C'' \setminus F$ такое, что $x \leq y$. Так как $C'' = (C \setminus B) \cup A$, то два случая возможны.
   (a) $y \in (C \setminus B) \setminus F$. Так как $B \subseteq F$, верно $y \in C \setminus F$, т.е. $x \in \widetilde{C}$, по определению 5.
   (b) $y \in A \setminus F$. Тогда имеем $y \in E'$, поскольку верно $A \subseteq E'$. Допустимы два случая.
      i. $x \in E'$. По определению 5, верно $x \leq' y$. Более того, справедливо $A \setminus F \subseteq A \setminus F'$, потому что $F' \subseteq F$. Значит, в силу $C' = (C'_0 \setminus B) \cup A$, получаем $x \in \lfloor A \setminus F' \rfloor_{\leq'} \subseteq \lfloor C' \setminus F' \rfloor_{\leq'} = \widetilde{C'}$, по определению 5.
      ii. $x \notin E'$. Согласно определению 5, имеем $x \in \widetilde{C} \cup \sharp(\widetilde{C})$. Покажем, что $x \notin \sharp(\widetilde{C})$. Рассмотрим два возможных случая.
         - $x = y \in A \setminus F$. Поскольку $(C \cup A)$ — бесконфиликтное множество, по определению 3(а), и $\widetilde{C} \subseteq C$, по лемме 2(в), то верно $x \notin \sharp(\widetilde{C})$, по определению 5.
         - $x < y \in A \setminus F$. Тогда имеем $x \in C$, согласно определению 3(б). Так как C — бесконфиликтное множество, по определению 3, и $\widetilde{C} \subseteq C$, по лемме 2(в), то справедливо $x \notin \sharp(\widetilde{C})$, по определению 5.

      Следовательно, получаем $x \in \widetilde{C}$.
2. $\widetilde{C}, \widetilde{C'} \subseteq \widetilde{C''}$.

   Пусть $x \in \widetilde{C}$. Тогда существует $y \in C \setminus F$ такое, что $x \leq y$. Так как $C'' = (C \setminus B) \cup A$ и $B \subseteq F$, то имеем $y \in C'' \setminus F$, т.е. $x \in \widetilde{C''}$.

   Пусть $x \in \widetilde{C'}$. Тогда существует $y \in C' \setminus F' \subseteq E'$ такое, что $x \leq' y$. Кроме того, согласно определению 5, имеем $F' = F \cap E'$ и $C'_0 = C \cap E'$. Так как $C'' = (C \setminus B) \cup A$ и $C' = ((C \cap E') \setminus B) \cup A$, то верно $y \in C'' \setminus F'$. В силу того, что справедливо $F' = F \cap E'$, $y \notin F'$ и $y \in E'$, заключаем, что $y \notin F$, т.е. $y \in C'' \setminus F$. По лемме 2(a), получаем $x \leq y$, поскольку верно $x \leq' y$. Следовательно, истинно $x \in \widetilde{C''}$.

3. $\sharp(\widetilde{C''}) \subseteq (\sharp(\widetilde{C}) \cup \sharp'(\widetilde{C'}))$. Пусть $x \in \sharp(\widetilde{C''})$. Тогда существует $y \in \widetilde{C''}$ такое, что $x \ \sharp \ y$. По определению 5, найдется $z \in C'' \setminus F$ такое, что $y \leq z$. Поскольку $\mathcal{E}$ принадлежит классу $c\mathcal{RPES}$, то получаем $x \ \sharp \ z$. Так как $C'' = (C \setminus B) \cup A$, то возможны два случая.
   (a) $z \in (C \setminus B) \setminus F$. Тогда верно $z \in C \setminus F$, благодаря $B \subseteq F$. Значит, справедливо $x \in \sharp(\widetilde{C})$.
   (b) $z \in A \setminus F$. Тогда имеем $z \in E'$, поскольку верно $A \subseteq E'$. Допустимы два случая.
      i. $x \in E'$. Так как $F' \subseteq F$, согласно лемме 2 (a), то $z \in A \setminus F'$. В силу того, что $C' = (C'_0 \setminus B) \cup A$, получаем $z \in C' \setminus F'$. Поскольку $C' \setminus F' \subseteq \widetilde{C'}$, по определению 5, имеем $z \in \widetilde{C'}$. Вновь по определению 5, верно $x \ \sharp' \ z$, так как $x \ \sharp \ z$. Тогда истинно $x \in \sharp'(\widetilde{C'})$.
      ii. $x \notin E'$. По определению 5, это означает $x \in \widetilde{C} \cup \sharp(\widetilde{C})$. Так как имеем $z \in E'$, то верно $z \notin \widetilde{C} \cup \sharp(\widetilde{C})$. Поскольку $z \notin \sharp(\widetilde{C})$, получаем $x \notin \widetilde{C}$. Тогда истинно $x \in \sharp(\widetilde{C})$.
4. $\sharp(\widetilde{C}), \sharp'(\widetilde{C'}) \subseteq \sharp(\widetilde{C''})$.
   Пусть $x \in \sharp(\widetilde{C})$. Тогда существует $y \in \widetilde{C}$ такое, что $x \ \sharp \ y$. По пункту 2, имеем $y \in \widetilde{C''}$. Значит, верно $x \in \sharp(\widetilde{C''})$.
   Пусть $x \in \sharp'(\widetilde{C'})$. Тогда существует $y \in \widetilde{C'}$ такое, что $x \ \sharp' \ y$. По лемме 2(a), получаем $x \ \sharp \ y$. По пункту 2, имеем $y \in \widetilde{C''}$. Значит, истинно $x \in \sharp(\widetilde{C''})$.

Следовательно, получили $\widetilde{C''} = (\widetilde{C} \cup \widetilde{C'})$ и $\sharp(\widetilde{C''}) = (\sharp(\widetilde{C}) \cup \sharp'(\widetilde{C'}))$. Тогда нетрудно убедиться в том, что верно $E'' = \overline{E}$. Проверим, что $F'' = \overline{F}$. По определению 5, получаем, что $F'' = F \cap E''$ и $\overline{F} = F' \cap \overline{E} = (F \cap E') \cap \overline{E}$. Согласно лемме 2(a), известно $\overline{E} \subseteq E'$. Отсюда заключаем, что верно $\overline{F} = F \cap \overline{E} = F \cap E'' = F''$, поскольку множества E'' и $\overline{E}$ совпадают. Аналогично доказывается, что $\nabla'' = \overline{\nabla}$ для каждого отношения $\nabla \in \{\prec, \sharp, <, \rhd\}$. Осталось показать совпадение начальных конфигураций. По определению 5, имеем $C''_0 = C'' \cap E''$ и $\overline{C}_0 = C' \cap \overline{E}$, где $C'' = (C \setminus B) \cup A$ и $C' = (C'_0 \setminus B) \cup A = ((C \cap E') \setminus B) \cup A$. Поскольку $A \subseteq E'$ и $B \subseteq F'$, то следующее равенство верно: $C' = ((C \setminus B) \cup A) \cap E' = C'' \cap E'$. В силу леммы 2(a), имеем $\overline{E} \subseteq E'$. Тогда справедливо $\overline{C}_0 = C' \cap \overline{E} = C'' \cap E' \cap \overline{E} = C'' \cap \overline{E} = C''_0$.

Таким образом, истинно $\mathcal{E} \setminus C'' = (\mathcal{E} \setminus C) \setminus C'$. □

Доказательство утверждения 2.

Предположим $\mathcal{E} \in c\mathcal{RPES}$ и $C', C'' \in Conf(\mathcal{E})$ такие, что $C' \overset{(A \cup \underline{B})}{\to} C''$ в $\mathcal{E}$. Поскольку $C' \overset{(A \cup \underline{B})}{\to} C''$ в $\mathcal{E}$, то имеем следующее: $C' \subseteq E$ — конечное и бескофликтное множество, $A \subseteq E$, $B \subseteq F$, шаг $(A \cup \underline{B})$ возможен из C' в $\mathcal{E}$ и $C'' = (C' \setminus B) \cup A$. По определению 5, определим $\mathcal{E} \setminus C' = (E', <' = < \cap (E' \times E'), \sharp' = \sharp \cap (E' \times E'), F' = (F \cap E'), \prec' = \prec \cap (E' \times \underline{F}'),$ $\rhd' = \rhd \cap\ (E' \times \underline{F}'), C'_0 = C' \cap E')$, где $E' = E \setminus \left(\widetilde{C'} \cup \sharp(\widetilde{C'})\right)$.

Предложение A. (а) $A \subseteq E'$; (б) $B \subseteq F'$.

Доказательство предложения A.

(а) Покажем, что верно $A \subseteq E'$. Предположим обратное, т.е. существует $a \in A$ такое, что $a \notin E'$. Поскольку $E' = E \setminus \left(\widetilde{C'} \cup \sharp(\widetilde{C'})\right)$ и $A \subseteq E$, то a принадлежит $\widetilde{C'} \cup \sharp(\widetilde{C'})$.

- $a \in \widetilde{C'}$. По лемме 2(в), имеем $a \in C'$, что противоречит $A \cap C' = \emptyset$, т.е. определению 3(а).
- $a \in \sharp(\widetilde{C'})$. Тогда $a \ \sharp\ e$ для некоторого события $e \in \widetilde{C'}$. В силу леммы 2(в), верно $e \in C'$. Поскольку имеем, что $a \in A$, $e \in C'$ и $a \ \sharp\ e$, то пришли к противоречию с бесконфликтностью множества $(C' \cup A)$, т.е. с определением 3(а).

Таким образом, верно $A \subseteq E'$.

(б) Покажем, что справедливо $B \subseteq F'$. Предположим обратное, т.е. существует $b \in B$ такое, что $b \notin F'$. Поскольку $E' = E \setminus \left(\widetilde{C'} \cup \sharp(\widetilde{C'})\right)$, $F' = F \cap E'$ и $B \subseteq F$, то b принадлежит $\widetilde{C'} \cup \sharp(\widetilde{C'})$.

- $b \in \widetilde{C'}$. По определению 5, существует $e \in (C' \setminus F)$ такое, что верно $b < e$, поскольку имеем $e \neq b \in B \subseteq F$. Благодаря тому, что РПСС $\mathcal{E}$ обладает свойством СПСЗ, получаем $e \rhd \underline{b}$. Так как шаг $(A \cup \underline{B})$ возможен из C' в $\mathcal{E}$, то пришли к противоречию с требованием $e \notin (C' \cup A)$, т.е. с определением 3(г).
- $b \in \sharp(\widetilde{C'})$. Тогда верно $b \ \sharp\ e$ для некоторого события $e \in \widetilde{C'}$. В силу леммы 2(в), верно $e \in C'$. Так как шаг $(A \cup \underline{B})$ возможен из C' в $\mathcal{E}$, то $b \in B \subseteq C'$, что противоречит бесконфликности множества C', т.е. условию определения 3.

Таким образом, справедливо $B \subseteq F'$. □

Убедимся, что шаг $(A \cup \underline{B})$ возможен из C'_0 в $\mathcal{E} \setminus C'$. Проверим выполнение пунктов (а)–(г) определения 3.

(а) Так как шаг $(A \cup \underline{B})$ возможен из C' в $\mathcal{E}$, то $A \cap C' = \emptyset$, $B \subseteq C'$ и $(C' \cup A)$ — конечное и бесконфликтное множество. Согласно лемме 2(а), верно $C'_0 \subseteq C'$. Значит, получаем, что $A \cap C'_0 = \emptyset$ и множество $(C'_0 \cup A)$, являющееся подмножеством конечного и бесконфликтного множества $(C' \cup A)$, конечно и бесконфликтно. Осталось проверить, что $B \subseteq C'_0$. Согласно предложению A(б), имеем $B \subseteq F'$. Так как по определению 5 верно: $F' = F \cap E'$ и $B \subseteq F$, то также верно, что $B \subseteq E'$. Вновь согласно определению 5, поскольку истинно $B \subseteq C'$, то истинно $B \subseteq C' \cap E' = C'_0$.

(б) Пусть $e \in A$, $e' \in E'$ и $e' <' e$. Благодаря лемме 2(а), получаем $e' < e$. Так как шаг $(A \cup \underline{B})$ возможен из C' в $\mathcal{E}$, то имеем $e' \in C' \setminus B$. Отсюда верно, что $e' \in C' \cap E'$ и $e' \notin B$. Следовательно, справедливо $e' \in (C'_0 = C' \cap E') \setminus B$, в силу определения 5.

(в) Пусть $e \in B$, $e' \in E'$ и $e' \prec' \underline{e}$. По лемме 2(а), получаем $e' \prec \underline{e}$. Так как шаг $(A \cup \underline{B})$ возможен из C' в $\mathcal{E}$, то $e' \in C' \setminus (B \setminus \{e\})$, т.е. $e' \in C'$ и $e' \notin B \setminus \{e\}$. Следовательно, истинно $e' \in ((C'_0 = C' \cap E') \setminus (B \setminus \{e\}))$, согласно определению 5.

(г) Пусть $e \in B$, $e' \in E'$ и $e' \rhd' \underline{e}$. Благодаря лемме 2(а), верно $e' \rhd \underline{e}$. Так как шаг $(A \cup \underline{B})$ возможен из C' в $\mathcal{E}$, то $e' \notin (C' \cup A)$. Из леммы 2(а) известно $C'_0 \subseteq C'$. Следовательно, верно $e' \notin (C'_0 \cup A)$.

Таким образом, шаг $(A \cup \underline{B})$ возможен из C'_0 в $\mathcal{E} \setminus C'$. Следовательно, получаем $C'_0 \overset{(A \cup \underline{B})}{\rightarrow} C$ в $\mathcal{E} \setminus C'$ и $C = (C'_0 \setminus B) \cup A$.

Поскольку $\mathcal{E} \in c\mathcal{RPES}$, то по утверждению 1 истинно $C' \overset{(A \cup \underline{B})}{\rightarrow} C'''$ в $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E} \setminus C''' = (\mathcal{E} \setminus C') \setminus C$. По определению 3, так как шаг $(A \cup \underline{B})$ возможен из C', то $C''' = ((C' \setminus B) \cup A)$, а значит конфигурации C'' и C''' совпадают. Таким образом, $\mathcal{E} \setminus C'' = (\mathcal{E} \setminus C') \setminus C$. □

Доказательство утверждения 3.

(а) Возьмем произвольную конфигурацию $C \in Conf(\mathcal{E})$. По определению 3, для каждого $1 \leq i \leq n$ существуют множества $A_i \subseteq E$ и $B_i \subseteq F$ такие, что $C_{i-1} \overset{(A_i \cup \underline{B_i})}{\rightarrow} C_i$ и $C = C_n$ $(n \geq 0)$. По этому же определению очевидно, что для каждого $0 \leq i \leq n$ верно: $C_i \in Conf(\mathcal{E})$. Тогда, поскольку $\mathcal{E} \in c\mathcal{RPES}$, благодаря лемме 2(б) для каждого $0 \leq i \leq n$ истинно, что $\mathcal{F}_i = \mathcal{E} \setminus C_i \in c\mathcal{RPES}$. Более того, так как $\mathcal{E} \in c\mathcal{RPES}$ и $C_i \overset{(A_{i+1} \cup \underline{B_{i+1}})}{\rightarrow} C_{i+1}$ для каждого $0 \leq i < n$, то по утверждению 2 для каждого $0 \leq i < n$ верно, что $C^i_0 \overset{(A_{i+1} \cup \underline{B_{i+1}})}{\rightarrow} C^i_1$ в $\mathcal{F}_i$ и $\mathcal{F}_{i+1} = \mathcal{F}_i \setminus C^i_1$. По определению 7 это означает, что $\mathcal{F}_i \overset{(A_{i+1} \cup \underline{B_{i+1}})}{\rightharpoondown} \mathcal{F}_{i+1}$ для каждого $0 \leq i < n$. Таким образом, так как $\mathcal{F}_0 = \mathcal{E} \setminus C_0$ и $\mathcal{F}_n = \mathcal{E} \setminus C$, вновь по определению 7 получаем, что $\mathcal{E} \setminus C \in Reach(\mathcal{E})$.

(б) Возьмем произвольную $\mathcal{E}' \in Reach(\mathcal{E})$. Следовательно, по определению 7, существуют $\mathcal{E}_0, \ldots, \mathcal{E}_n$ $(n \geq 0)$ такие, что $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} \setminus C_0$, $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}'$ и для каждого $0 \leq i < n$ верно: $\mathcal{E}_i \overset{(A_{i+1} \cup \underline{B_{i+1}})}{\rightharpoondown} \mathcal{E}_{i+1}$. Воспользуемся методом математической индукции и покажем, что для любого $0 \leq i \leq n$ существует $C_i \in Conf(\mathcal{E})$ такая, что $\mathcal{E}_i = \mathcal{E} \setminus C_i$.

$i = 0$. Очевидно, $C_0 \in Conf(\mathcal{E})$ и $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} \setminus C_0$.

$i > 0$. По предположению индукции имеем, что $\mathcal{E}_i = \mathcal{E} \setminus C_i$ для некоторой конфигурации $C_i \in Conf(\mathcal{E})$. Покажем, что существует $C_{i+1} \in Conf(\mathcal{E})$ такая, что $\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{E} \setminus C_{i+1}$. Поскольку $\mathcal{E}_i \overset{(A_{i+1} \cup B_{i+1})}{\rightharpoonup} \mathcal{E}_{i+1}$, то по определению отношения $\rightharpoonup$ получаем, что $\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{E}_i \setminus C_1^i$ для некоторой $C_1^i \in Conf(\mathcal{E}_i)$ такой, что $C_0^i \overset{(A_{i+1} \cup B_{i+1})}{\rightarrow} C_1^i$ в $\mathcal{E}_i$. Тогда, так как $\mathcal{E} \in c\mathcal{RPES}$, $\mathcal{E}_i = \mathcal{E} \setminus C_i$ и $C_0^i \overset{(A_{i+1} \cup B_{i+1})}{\rightarrow} C_1^i$ в $\mathcal{E}_i$, то по утверждению 1 получаем, что $C_i \overset{(A_{i+1} \cup B_{i+1})}{\rightarrow} C_{i+1}$ в $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E} \setminus C_{i+1} = \mathcal{E}_i \setminus C_1^i = \mathcal{E}_{i+1}$.

Таким образом, показали существование $C_n \in Conf(\mathcal{E})$ такой, что $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_n = \mathcal{E} \setminus C_n$.

(в) Пусть конфигурации $C, C' \in Conf(\mathcal{E})$ выбраны так, что $C \overset{(A \cup \underline{B})}{\rightarrow} C'$. По определению отношения $\rightarrow$ это означает, что $C \overset{(A \cup \underline{B})}{\rightarrow} C'$ в $\mathcal{E}$. Согласно пункту (а) имеем, что $\mathcal{E} \setminus C,\ \mathcal{E} \setminus C' \in Reach(\mathcal{E})$. Так как $\mathcal{E} \in c\mathcal{RPES}$ и $C \overset{(A \cup \underline{B})}{\rightarrow} C'$ в $\mathcal{E}$, то по утверждению 2 истинно, что $C_0' \overset{(A \cup \underline{B})}{\rightarrow} C_1'$ в $\mathcal{E} \setminus C$ и $\mathcal{E} \setminus C' = (\mathcal{E} \setminus C) \setminus C_1'$. Однако, в соответствии с определением отношения $\rightharpoonup$, это означает, что $\mathcal{E} \setminus C \overset{(A \cup \underline{B})}{\rightharpoonup} \mathcal{E} \setminus C'$.

(г) Выберем произвольным образом $\mathcal{E}', \mathcal{E}'' \in Reach(\mathcal{E})$ так, чтобы $\mathcal{E}' \overset{(A \cup \underline{B})}{\rightharpoonup} \mathcal{E}''$. И пусть $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \setminus C'$ для некоторой $C' \in Conf(\mathcal{E})$. Заметим, что по пункту (б) как минимум одна такая конфигурация существует. Согласно определению отношения $\rightharpoonup$, верно: $\mathcal{E}'' = \mathcal{E}' \setminus C_1'$, где $C_0' \overset{(A \cup \underline{B})}{\rightarrow} C_1'$ в $\mathcal{E}'$. Тогда, поскольку $\mathcal{E} \in c\mathcal{RPES}$, по утверждению 1, получаем, что $C' \overset{(A \cup \underline{B})}{\rightarrow} C''$ в $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E} \setminus C'' = \mathcal{E}' \setminus C_1' = \mathcal{E}''$. Благодаря определению отношения $\rightarrow$ имеем, что $C' \overset{(A \cup \underline{B})}{\rightarrow} C''$. $\square$